Rekonstruksi Model Program Nonlinier Dengan Fungsi Polinomial Menjadi Bentuk Program Kuadratik

Amar Pilenon Sinaga
Universitas Negeri Medan

Lasker Pangarapan Sinaga
Universitas Negeri Medan

Email: amarpilenonsinaga@gmail.com

Abstract. *The purpose of this research to revisits methods that are more effective in nonlinear Optimization with single variable polynomial functions at high degrees. Models with linear objective functions and constraint functions are Polynomials of third, fourth and fifth degree reconstructed into subproblems that are easier to solve, namely quadratic programs, using bilinear Auxiliary Functions and solved by MATLAB simulations. The method used is the development of Tawarmalani & Sahinidis' research regarding relaxation with Auxiliary Functions. Examples of nonlinear Optimization with polynomial functions are also given to illustrate the implementation of this algorithm. The results of the research show that the application of the development reconstruction method produces a global solution that is no better than the solution to the original problem so that it is not an effective alternative method to use.*

Keywords : *Optimization, Polynomials, Auxiliary Functions, Quadratic Programming*

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji kembali metode yang lebih efektif dalam Optimisasi nonlinier dengan fungsi polinomial variabel tunggal pada derajat tinggi. Model dengan fungsi tujuan linier dan fungsi kendala merupakan polinomial derajat tiga, empat dan lima direkonstruksi menjadi submasalah yang lebih mudah diselesaikan yaitu Program Kuadratik dengan menggunakan Fungsi Pembantu bilinear dan diselesaikan dengan simulasi MATLAB. Metode yang digunakan merupakan pengembangan dari penelitian Tawarmalani & Sahinidis mengenai relaksasi dengan Fungsi Pembantu. Contoh Optimisasi nonlinier dengan fungsi polinomial juga diberikan untuk menggambarkan penerapan algoritma ini. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan metode rekonstruksi pengembangan menghasilkan solusi global yang tidak lebih baik dari solusi masalah aslinya sehingga tidak menjadi metode alternatif yang efektif untuk digunakan.

Kata kunci : Optimisasi, Polinomial, Fungsi Pembantu, Program Kuadratik

PENDAHULUAN

Optimisasi matematika merupakan suatu bagian dari ilmu matematika terapan dalam Operasi Riset (*Research Operation*) atau OR. Optimisasi dapat didefinisikan sebagai suatu proses penyelesaian masalah dalam meminimalkan atau memaksimalkan fungsi untuk mendapatkan hasil yang optimal (Guenin *et al.*, 2014). Suatu model Optimisasi dengan fungsi tujuan dan fungsi kendala berbentuk nonlinier maka disebut program nonlinier. Masalah pada model pemrograman nonlinier memiliki bentuk yang lebih kompleks dan dinamis sehingga dalam penyelesaian masalahnya melibatkan proses yang rumit.

Salah satu kelas pada program nonlinier adalah model nonlinier dengan memuat fungsi polinomial pada fungsi tujuan atau fungsi kendala. Masalah Optimisasi nonlinier dengan fungsi polinomial ini seringkali melibatkan fungsi polinomial berderajat tinggi, seperti 3, 4, dan 5 dan seterusnya. Optimisasi dalam masalah polinomial dengan derajat tinggi pernah dilakukan dalam penelitian Ferrier (1998) dan Sherali & Tuncbilek (1992) dimana memiliki banyak peminimal lokal dengan aproksimasi yang mendorong konvergensi ke solusi optimal global tetapi belum menghasilkan relaksasi yang ketat. Masalah Optimisasi fungsi polinomial ini menarik tidak hanya karena kompleksitas pada struktur masalah, tetapi juga karena fungsi ini membentuk struktur masalah Optimisasi yang lebih besar yang melibatkan lebih banyak variabel. Solusi dari masalah Optimisasi yang melibatkan variabel tunggal seringkali dapat memberikan pengetahuan yang signifikan ke dalam masalah Optimisasi yang lebih besar. Dixon (1990) mengusulkan metode interval untuk menemukan solusi global untuk fungsi dari satu variabel. Dalam menemukan solusi optimal global dengan metode lama tersebut merupakan suatu proses yang sangat panjang dan kompleks.

Tawarmalani & Sahinidis (2004) dalam penelitiannya pernah membentuk algoritma relaksasi untuk mengubah fungsi terpisah menggunakan Fungsi Pembantu (*auxiliary variable*). Prosedur algoritma tersebut dapat dideskripsikan secara rekursif dengan melakukan dekomposisi awal dari fungsi sebagai produk/jumlah bagian fungsi. Sehingga algoritma ini juga dapat diterapkan untuk menangani fungsi nonlinier dengan bentuk polinomial derajat tinggi menjadi Program Kuadratik sehingga dapat lebih mudah diselesaikan.

Berdasarkan uraian latar belakang diatas maka perlu dilakukan pendalaman pemahaman dalam merekonstruksi model program nonlinier yang melibatkan fungsi polinomial pada fungsi kendalanya dengan menggunakan Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) bilinear menjadi Program Kuadratik. Tujuan dilakukan penelitian ini adalah mengkaji kembali metode yang lebih efektif dalam Optimisasi nonlinier dengan fungsi polinomial variabel tunggal pada derajat tinggi seperti derajat tiga, empat dan lima.

KAJIAN TEORITIS

Model Program Nonlinier dengan Fungsi Polinomial

Model Optimisasi ini merupakan masalah Optimisasi global yang sangat sulit karena terdapat banyak kasus khusus seperti masalah Optimisasi kuadratik nonkonveks yang diketahui sebagai *NP-hard*. Suatu model program nonlinier dengan fungsi polinomial memiliki bentuk :

$$\text{Min} \quad f_0(x) \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{Subject to} \quad f_i(x) \leq S_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n,$$

dimana,

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{J_i} A_{i,j} m_{i,j} \text{ dan } m_{i,j} = \prod_{k=1}^n x_k^{r_{i,j,k}} ; \quad \dots\dots(2)$$

$$\sum_{k=1}^n r_{i,j,k} \leq k ;$$

$$r_{i,j,k} \geq 0 \text{ untuk } i = 1, \dots, n$$

(Karia *et al.*, 2022)

Dengan $A_{i,j}$ adalah koefisien real dari $m_{i,j}$ dalam kendala pertidaksamaan ke- i dan $x \in X = \{x : 0 \leq \ell_k \leq x_k \leq u_k < \infty \text{ untuk } k \in N = \{1, \dots, n\}\}$.

Fungsi Pembantu (*Auxiliary Function*)

Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) pada Optimisasi merupakan suatu pendekatan dalam Optimisasi untuk mencari solusi global terbaik diantara solusi lokal. Fungsi Pembantu sering digunakan karena perhitungan metode yang diusulkan relatif lebih sedikit. Pada Optimisasi nonlinier, Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) bilinear pernah digunakan pada Tawarmalani & Sahinidis (2004) untuk merelaksasi fungsi terpisah yang disajikan sebagai berikut :

Jika $f(x) = \prod_{i=1}^l f_i(x)$, maka

Untuk $i := 1$ sampai l lakukan

Perkenalan variabel y_f , sedemikian sehingga $y_f =$ Relaksasi Multilinier $\prod_{i=1}^l y_{f_i}$

Relaksasi Multilinier $\prod_{i=1}^l y_{f_i}$

Untuk $i := 2$ sampai l lakukan

Pengenalan variabel $y_{r_1, \dots, r_i} =$ Relaksasi Bilinier $y_{r_1, \dots, r_{i-1}} y_{r_i}$

Program Kuadratik

Menurut (Hillier & Lieberman, 2001) Program Kuadratik (*Quadratic Programming*) adalah permasalahan Optimisasi nonlinier dalam meminimalkan atau memaksimalkan fungsi tujuan atau kendala berupa fungsi kuadratik. Setiap fungsi terdiferensiasi dua kali dapat didekati dengan fungsi kuadratik di sekitar titik tertentu, sehingga dalam arti tertentu model kuadratik adalah yang paling alami (Hoang Tuy, 2016). Fungsi kuadratik dapat berisi suku polinomial bilinier atau orde kedua, dan kendalanya dapat berupa persamaan dan pertidaksamaan. Bentuk umum dari masalah Program Kuadratik adalah :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = x^T Qx + c^T x && \dots\dots(3) \\ \text{Subject to} \quad & a_i^T x \leq b_i \\ & a_i^T x = b_i \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dimana Q adalah matriks $n \times n$, c adalah vektor baris, a dan b merupakan vektor kolom dalam R^n , serta T melambangkan transpose.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian/riset kepustakaan (*library research*). Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku referensi, jurnal, maupun dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topik pembahasan. Adapun prosedur yang dilakukan dalam melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi bentuk model program nonlinier dengan fungsi tujuan linier dan fungsi kendala berupa fungsi polinomial variabel tunggal derajat 3, 4 dan 5.
2. Melakukan relaksasi model program nonlinier dengan fungsi polinomial menggunakan Fungsi Pembantu yang mengacu pada Tawarmalani & Sahinidis (2004). Dalam tahap ini dilakukan pendefinisian $x^n \rightarrow y_1, y_2$ untuk menentukan variabel pembantu bilinear y_1 dan y_2 .
3. Memeriksa batas bawah (*lower bound*) dan batas atas (*upper bound*) dari y_1 dan y_2 pada pilihan kasus kuadratik.
4. Melakukan reformulasi variabel pembantu bilinear y_1 dan y_2 terhadap model program nonlinier dengan fungsi polinomial menjadi bentuk Program Kuadratik. Reformulasi model terhadap Fungsi Pembantu bilinear ini akan membentuk fungsi affine yang bukan kuadratik.
5. Menyelesaikan model Program Kuadratik hasil rekonstruksi.
6. Membangun program dengan aplikasi MATLAB dan simulasi.
7. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Program Nonlinier dengan Fungsi Polinomial Maksimal Derajat Lima

Model Optimisasi nonlinier dengan fungsi tujuan merupakan linier dan fungsi polinomial variabel tunggal derajat maksimal lima pada fungsi kendala dapat dibentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & ax + b \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{j=1}^{J_i} A_{i,j} x^{r_{i,j}} \leq S_i \quad \dots\dots(4) \\ & 0 \leq r_{i,j} \leq 5 \text{ untuk } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dimana $x^{r_{i,j}}$ merupakan variabel yang maksimal berderajat 5. $A_{i,j}$ merupakan koefisien real dari variabel dalam kendala pertidaksamaan ke- i . Dengan $x \in X = \{x : 0 \leq \ell_k \leq x_k \leq u_k < \infty \text{ untuk } k \in N = \{1, \dots, n\}\}$ dan $f(x) = ax + b$.

Rekonstruksi Fungsi Polinomial Derajat Tiga, Empat dan Lima Menjadi Kuadratik

Tawarmalani & Sahinidis (2004) menjelaskan teknik relaksasi fungsi terpisah dimana dalam penelitian ini akan digunakan untuk mengubah fungsi polinomial menjadi Program Kuadratik menggunakan Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) yang merupakan bilinear. Langkah awal prosedur rekonstruksi model program polinomial variabel tunggal derajat 3,4 dan 5 menjadi Program Kuadratik berkendala yaitu melakukan pengenalan variabel pembantu. Dalam kasus ini bentuk reformulasi variabel pembantu untuk fungsi polinomial dengan variabel tunggal didefinisikan sebagai berikut :

$$x^{r_{i,j}} \rightarrow y_1 y_2 \quad \dots\dots(5)$$

Dimana $3 \leq r_{i,j} \leq 5$ yang merupakan derajat pada variabel tunggal x .

Penentuan variabel pembantu y_1 dan y_2 akan mengubah fungsi polinomial menjadi beberapa pilihan kasus kuadratik. Pilihan-pilihan kasus kuadratik ditunjukkan pada Tabel 1 berikut :

Tabel 1. Rekonstruksi model nonlinier fungsi polinomial derajat 3, 4 dan 5

Derajat	Bentuk	Jumlah Kasus	Pilihan Kasus	
			y_1	y_2
3	$f(x) = x_1^3$	1	x_1^2	x_1
4	$f(x) = x_1^4$	2	x_1^3	x_1
			x_1^2	x_1^2
5	$f(x) = x_1^5$	2	x_1^4	x_1
			x_1^3	x_1^2

Analisis Batas Atas dan Batas Bawah

Pada bagian ini akan dilakukan analisis relaksasi bilinear sebagai langkah selanjutnya dari pengenalan variabel. Untuk $k = 1, 2$ dimisalkan variabel batas bawah $y_k^l = \min_y y_k$ dan batas atas $y_k^u = \max_y y_k$ maka dapat dibentuk sebuah *hyperrectangle* $\Omega = \{(y_1, y_2) \in R^n \mid y_1^l \leq y_1 \leq y_1^u, y_2^l \leq y_2 \leq y_2^u\}$. Dari himpunan tersebut kemudian

didefinisikan amplop konveks yang diusulkan oleh Al-Khayyal *et al.* (1995) yang sesuai dari analisis relaksasi bilinear sebagai berikut :

Teorema 4.3.1

Perhatikan bentuk bilinear $y_1 y_2$ dalam Ω , maka dapat diketahui :

$$\{ (y_1, y_2) = \max \{ y_1' y_2 + y_2' y_1 - y_1' y_2', y_1'' y_2 + y_2'' y_1 - y_1'' y_2'' \}$$

$$\mathbb{E} (y_1, y_2) = \min \{ y_1' y_2 + y_2' y_1 - y_1' y_2'', y_1'' y_2 + y_2'' y_1 - y_1'' y_2' \}$$

Dimana $\{ (y_1, y_2)$ merupakan batas atas untuk variabel pembantu $y_1 y_2$ dan $\mathbb{E} (y_1, y_2)$ merupakan batas bawah untuk variabel pembantu $y_1 y_2$ pada amplop konveks fungsi bilinear.

Bukti :

Amplop konveks dari suatu fungsi f atas Ω dapat secara ekuivalen didefinisikan sebagai supremum titik-titik dari semua fungsi linier yang memperkirakan f atas Ω .

Karena $y_1 - y_1' \geq 0$ dan $y_2 - y_2' \geq 0$ maka

$$y_1 y_2 \geq y_1' y_2 + y_2' y_1 - y_1' y_2'$$

Sehingga $l_1 (y_1, y_2) = y_1' y_2 + y_2' y_1 - y_1' y_2'$ memperkirakan $y_1 y_2$ atas Ω . Demikian juga

$l_2 (y_1, y_2) = y_1'' y_2 + y_2'' y_1 - y_1'' y_2''$ memperkirakan $y_1 y_2$ atas Ω . Oleh karena itu,

$$* (y_1, y_2) = \max \{ l_1 (y_1, y_2), l_2 (y_1, y_2) \}$$

memperkirakan $y_1 y_2$ atas Ω . Perhatikan bahwa $*$ merupakan konveks.

Demikian juga komputasi sederhana menunjukkan bahwa $*$ (y_1, y_2) dimuat dengan $y_1 y_2$ di empat titik ekstrim dari *hyperrectangle* Ω yaitu, $\max \{ l_1 (y_1, y_2), l_2 (y_1, y_2) \} = y_1 y_2$. Jika $*$ bukan amplop konveks dari $y_1 y_2$ atas Ω , akan ada fungsi linier ketiga $l_3 (y_1, y_2)$ sedemikian sehingga $\max \{ l_1 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2), l_2 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \} < l_3 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \leq \tilde{y}_1 \tilde{y}_2$ untuk $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \Omega$. Akan tetapi l_3 juga harus memperkirakan $y_1 y_2$ di Ω , jadi $l_3 (y_1^c, y_2^c) \leq y_1^c y_2^c$ untuk setiap sudut $l_3 (y_1^c, y_2^c) \leq (y_1^c y_2^c)$ di Ω . Kondisi ini mengimplikasikan bahwa $l_3 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \leq \max \{ l_1 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2), l_2 (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \}$ yang merupakan kontradiksi.

Dari amplop konveks tersebut memuat empat batas linier *McCormick* (McCormick, 1976) berikut :

$$y_1 y_2 \geq y_1' y_2 + y_2' y_1 - y_1' y_2'$$

$$y_1 y_2 \geq y_1'' y_2 + y_2'' y_1 - y_1'' y_2''$$

$$y_1 y_2 \leq y_1' y_2 + y_2'' y_1 - y_1' y_2''$$

$$y_1 y_2 \leq y_1'' y_2 + y_2' y_1 - y_1'' y_2'$$

Ketidaksetaraan tersebut berfungsi sebagai batas bawah untuk program nonlinier asli karena setiap solusi layak untuk masalah asli pasti juga layak untuk masalah yang direlaksasi. Oleh karena itu, jika sembarang variabel asli y_1 berada pada batas atas atau bawahnya pada solusi optimal, semua variabel linierisasi hasil kali y_1 dan y_2 akan sama dengan hasil kali tersebut.

Contoh (Floudas & Visweswaran, 1990)

Sebagai contoh, dapat diperhatikan menyelesaikan masalah nonlinier dengan fungsi polinomial variabel tunggal berikut :

Min $-x_1 - x_2$

Subject to $2x_1^4 - 8x_1^3 + 8x_1^2 + 2 \geq x_2$

$$4x_1^4 - 32x_1^3 + 88x_1^2 - 96x_1 + 36 \geq x_2$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 4$$

Penyelesaian :

Langkah 1. Identifikasi model nonlinier dengan fungsi polinomial.

Bentuk polinomial pada fungsi kendalanya diantara lain x_1^4 yang dapat direkonstruksi menggunakan variabel pembantu.

Langkah 2. Rekonstruksi fungsi polinomial menggunakan kasus kuadratik.

Berdasarkan tabel 1, bentuk polinomial x_1^4 dapat direkonstruksi dengan pilihan kemungkinan kasus variabel pembantu yaitu :

$$y_1 = x_1^3$$

Rekonstruksi model terhadap Fungsi Pembantu bilinear ini akan membentuk fungsi affine yang bukan kuadratik dalam penyelesaiannya.

Langkah 3. Reformulasi model nonlinier dengan fungsi polinomial menjadi bentuk Program Kuadratik menggunakan Fungsi Pembantu bilinear.

Dengan menggunakan pendefinisian variabel pembantu pada langkah 2, model pada contoh dapat direformulasi menjadi bentuk Program Kuadratik sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{Subject to} \quad & 2y_1x_1 - 8y_1 + 8x_1^2 + 2 \geq x_2 \\ & 4y_1x_1 - 32y_1 + 88x_1^2 - 96x_1 + 36 \geq x_2 \\ & y_1 - x_1^3 = 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq y_1 \leq 27 \end{aligned}$$

Langkah 4. Penyelesaian Optimisasi model Program Kuadratik menggunakan aplikasi MATLAB.

```
All 58 local solver runs converged with a positive local solver exit flag.
x =
    2.3295
    3.1785
   12.6415
fval = -5.5080
exitflag = 1

output = struct with fields:
    funcCount: 6505
    localSolverTotal: 58
    localSolverSuccess: 58
    localSolverIncomplete: 0
    localSolverNoSolution: 0
```

Gambar 1. Output MATLAB penyelesaian Program Kuadratik

Berdasarkan hasil output aplikasi MATLAB diatas, solusi global dari model Program Kuadrat hasil rekonstruksi dari contoh soal yaitu -5.50801 yang terjadi pada $x_1^* = 2.3295$, $x_2^* = 3.1785$ dan $y_1^* = 12.6415$.

Program nonlinier dengan fungsi polinomial secara teoritis sulit untuk diselesaikan, bahkan untuk masalah dengan tujuan linier. Salah satu strategi yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan program nonlinier dengan fungsi polinomial adalah dengan melakukan rekonstruksi fungsi polinomial menjadi bentuk kuadrat menggunakan Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) berbentuk bilinier. Metode ini dirancang untuk menangani fungsi nonlinier dengan bentuk polinomial derajat tinggi seperti derajat lima, tetapi submasalah jauh lebih mudah ditangani jika dalam kasus kuadrat. Kekurangan dari metode ini yaitu penambahan variabel baru untuk rekonstruksi akan memperbanyak dimensi dari masalah asli.

Berdasarkan hasil Optimisasi menggunakan Fungsi Pembantu bilinier pada contoh yang merupakan masalah nonlinier dengan fungsi polinomial variabel tunggal menunjukkan solusi global yang tidak lebih baik dari hasil masalah aslinya. Dengan demikian Optimisasi program nonlinier dengan fungsi polinomial pada fungsi kendala dengan merekonstruksi model menjadi bentuk Program Kuadrat menggunakan Fungsi Pembantu bilinier tidak menjadi metode alternatif terbaik untuk digunakan.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah disajikan maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Algoritma rekonstruksi dalam menyelesaikan masalah program nonlinier dengan fungsi polinomial variabel tunggal derajat 3,4 dan 5 pada fungsi kendala menggunakan Fungsi Pembantu (*auxiliary function*) bilinier yaitu :
 - a. Mengidentifikasi bentuk model program nonlinier dengan fungsi tujuan linier dan fungsi kendala berupa fungsi polinomial variabel tunggal derajat 3, 4 &5.
 - b. Melakukan relaksasi model program nonlinier dengan fungsi polinomial menggunakan Fungsi Pembantu yang mengacu pada Tawarmalani & Sahinidis (2004). Dalam tahap ini dilakukan pendefinisian $x^n \rightarrow y_1, y_2$ untuk menentukan variabel pembantu bilinier y_1 dan y_2 .

- c. Memeriksa batas bawah (*lower bound*) dan batas atas (*upper bound*) dari y_1 dan y_2 pada pilihan kasus kuadratik.
 - d. Melakukan reformulasi variabel pembantu bilinear y_1 dan y_2 terhadap model program nonlinier dengan fungsi polinomial menjadi bentuk Program Kuadratik. Reformulasi model terhadap Fungsi Pembantu bilinear ini akan membentuk fungsi affine yang bukan kuadratik.
 - e. Menyelesaikan model Program Kuadratik hasil rekonstruksi.
 - f. Membangun program dengan aplikasi MATLAB dan simulasi.
 - g. Menarik kesimpulan.
2. Optimisasi program nonlinier dengan fungsi polinomial pada fungsi kendala yang direkonstruksi menjadi bentuk Program Kuadratik dengan menggunakan Fungsi Pembantu bilinear dan penyelesaian Program Kuadratiknya dengan menggunakan aplikasi MATLAB menghasilkan solusi global yang yang tidak lebih baik dari hasil penyelesaian masalah aslinya. Sehingga metode tersebut tidak menjadi metode alternatif yang efektif untuk digunakan pada Optimisasi program nonlinier dengan fungsi polinomial.

SARAN

Berdasarkan batasan penelitian disarankan pada penelitian selanjutnya menggunakan fungsi tujuan dan fungsi kendala berupa fungsi polinomial multivariabel derajat tinggi. Bagi pembaca yang ingin mengembangkan lebih lanjut tentang Optimisasi nonlinier dengan fungsi polinomial ini dapat membahasnya menggunakan relaksasi yang lebih baik dengan tujuan mendapatkan solusi yang lebih optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Khayyal, F. A., Larsen, C. & Voorhis, T. V. (1995). A Relaxation Method For Nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programs. *Journal of Global Optimization*, 6(1): 215-230.
- Dixon, L. C. W. (1990). On Finding the Global Minimum of a Function of One Variable. Presented at the SIAM National Meeting, Chicago.
- Ferrier, Ch. (1998). Hilbert's 17th Problem And Best Dual Bounds In Quadratic Minimization. *Cybernetics and Systems Analysis*, 34(5) : 696-709.
- Guenin, B., Konemann, J. & Tuncel, L. (2014). *A Gentle Introduction To Optimization*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to Operations Research*, Seventh Edition. New York : The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Karia, T., Adjiman, C. S. & Chachuat, B. (2022). Assesment Of A Two Step Approach For Global Optimization Of Mixed-Integer Polynomial Programs Using Quadratic Reformulation. *Computers and Chemical Engineering*, 165(1) : 1- 10.
- McCormick, G. P. (1976). Computability Of Global Solutions To Factorable Nonconvex Programs: Part I - Convex Underestimating Problems. *Mathematical Programming*, 10 (1) : 147 – 175.
- Sherali, H. D. & Tuncbilek, C. H. (1992). A Global Optimization Algorithm for Polynomial Programming Problems Using a Reformulation-Linearization Technique. *Journal of Global Optimization*, 2(1) : 101-112.
- Tawarmalani, M. & Sahinidis, N. V. (2004). Global Optimization Of Mixed-Integer Nonlinear Programs: A Theoretical And Computational Study. *Mathematical Programming*, 99(3) : 563-591.
- Tuy, H. (2016). *Convex Analysis and Global Optimization*, Second Edition. Switzerland : Springer Cham.
- Visweswaran, V. & Floudas, C. A. (1990). A Global Optimization Algorithm (GOP) for Certain Classes of Nonconvex NLPs - II. Application of Theory and Test Problems. *Computers and Chemical Engineering*, 14(12) : 1419-1434.