Jurnal Riset Rumpun Ilmu Pendidikan (JURRIPEN)
Vol. 2, No. 1 April 2023
e-ISSN: 2828-8483; p-ISSN: 2828-8432, Hal 32-42

Analisis Optimisasi Program Kuadratik Dengan Fungsi Penalty

Roberto Parujian Sitanggang
Universitas Negeri Medan

Lasker Pangarapan Sinaga
Universitas Negeri Medan

Email: robertositanggang10@gmail.com

Abstract. *This study aims to analyze the optimality of a quadratic program model using the penalty function. The analysis is carried out in each case that has been made so that in each case optimal results are obtained. There are many methods that can be used to solve the quadratic program problem but in terms of the number of iterations, this research uses the penalty function and then implements it into the Matlab programming language. The results obtained in this study indicate that by using the penalty function as a parameter, the optimal value of a function can be obtained. The results of the analysis will also be more optimal by using the lagrange method depending on the parameter values obtained.*

Keywords *: Optimization Analysis, Quadratic Program, Penalty Function, Lagrange Method.*

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keoptimalan dari suatu model program kuadratik dengan menggunakan fungsi penalty. Analisis dilakukan pada setiap kasus yang telah dibuat sehingga pada masing - masing kasus didapatkan hasil yang optimal. Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah program kuadratik tetapi ditinjau dari banyaknya iterasi maka pada penelitian ini menggunakan fungsi penalty kemudian diimplementasikan ke dalam bahasa pemprograman Matlab. Hasil yang didapat pada penelitian ini menunjukkan bahwa dengan fungsi penalty dijadikan sebagai suatu parameter maka nilai dari keoptimalan suatu fungsi dapat diperoleh. Hasil analisis tersebut juga akan semakin optimal dengan menggunakan metode *Lagrange* bergantung pada nilai parameter yang didapat.

Kata kunci : Analisis Optimisasi, Program Kuadratik, Fungsi Penalty, Metode *Lagrange*.

Received Febuari 01, 2023; Revised Maret 02, 2023; April 01, 2023
* Roberto Parujian Sitanggang, robertositanggang10@gmail.com

LATAR BELAKANG

Operasi Riset (*Research Operation*) atau OR merupakan suatu bagian dari ilmu matematika terapan dalam Optimisasi matematika. Terdapat dua jenis model optimasi yaitu model linear dan nonlinear. Model nonlinear dinyatakan dengan bentuk variabel keputusan pada fungsi tujuannya merupakan kuadrat dari variabel keputusan atau perkalian dari dua variabel keputusan (Hillier & Lieberman, 2001 : 665). Sedangkan model program linear adalah salah satu teknik/metode riset operasi yang digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan dengan memaksimumkan atau meminimumkan suatu bentuk fungsi tujuan atau fungsi tujuan dengan kendala-kendala berupa fungsi yang linier (Rao, 2009: 119).

Menurut Hillier (2001:664) terdapat beberapa metode dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman nonlinier antara lain Quadratic Programming, dll. Teknik optimisasi masalah nonlinear berkendala dibagi menjadi dua kategori, yaitu metode langsung (*direct method*) dan metode tidak langsung (*indirect method*). Salah satu yang termasuk metode langsung yaitu metode Pemrograman Kuadratik. (Rao, 2009: 381).

Menurut Mokhtar S. Bazaraa (1979: 447) Pemrograman kuadratik digunakan dalam penyelesaian permasalahan optimisasi nonlinear dengan kendalanya berupa fungsi linear dan fungsi tujuannya merupakan fungsi nonlinear. (Hillier & Lieberman, 2001: 665 Ada beberapa teknik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah program kuadratik salah satunya yaitu dengan Metode Fungsi Penalty.

Metode fungsi penalty digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman nonlinier yang didasarkan pada konstruksi suatu fungsi yang bergantung pada parameter penaltynya (Hariadi, V. 2009). Prinsip dasar fungsi penalty adalah mengubah suatu permasalahan yang dibatasi (*constrained*) menjadi suatu permasalahan yang tidak dibatasi (*unconstrained*) dengan menambahkan suatu parameter penalty ke dalam fungsi obyektif.

Penyelesaian pengali lagrange mempunyai kondisi yang harus dipenuhi untuk mendapatkan penyelesaian optimal. Jika masalah memaksimumkan maka fungsi tujuan harus dalam bentuk konkaf dan setiap fungsi kendala berupa fungsi linear yang konveks, sedangkan jika masalah meminimumkan maka fungsi tujuan harus konveks dan setiap fungsi kendala berupa fungsi linear yang konveks (Winston, 2003: 685).

Dalam pencarian solusi optimal dari suatu optimisasi biasanya digunakan metode numeris dan metode yang dipilih dalam bab ini adalah metode *Lagrange* sedangkan untuk mencari keoptimalan pada program kuadratik tersebut digunakan aplikasi Matlab. Berdasarkan uraian latar belakang di atas maka perlu dilakukan pendalaman pemahaman dalam menganalisis optimisasi program kuadratik dengan fungsi penalty dan untuk membantu proses perhitungan pada pemprograman kuadratik digunakan aplikasi Matlab.

KAJIAN TEORITIS

Program Nonlinear

Menurut Hillier dan Lieberman (2001) bentuk umum dari pemrograman nonlinier untuk mencari nilai $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ sehingga:

Maksimum/minimum $\qquad f(x) \qquad$ ……(1)

Dengan fungsi kendala

$$\begin{array}{ll} h_1(x)=0 & g_1(x)\le 0 \\ h_2(x)=0 & g_2(x)\le 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_m(x)=0 & g_p(x)\le 0 \end{array}$$

Untuk $h_m(x)$ dan $g_p(x)$ disebut sebagai kendala fungsional.

Program Kuadratik

Menurut Mokhtar S. Bazaraa (1979 : 447) program kuadratik merupakan bentuk khusus dari program nonlinier yang memiliki fungsi tujuan berbentuk kuadratik dan kendala linier. Perbedaan antara masalah program kuadratik dan masalah pemrograman linier adalah syarat dalam fungsi tujuan atau kendala melibatkan kuadrat dari suatu variabel x_j^2 maupun perkalian dari dua variable. Menurut penelitian Sahanidis & Bao (2011), masalah pemrograman kuadratik terkendala umum dapat dirumuskan sebagai:

Minimumkan $\qquad f(x)=\frac{1}{2}x^TQx+c^Tx \qquad$ ……(2)

subject to $\qquad a_i^T x\le b_i$

$$a_i^T x = b_i$$

$$x\ge 0$$

Dimana Q adalah matriks $n \times n$, c adalah vektor baris, a dan b merupakan vektor kolom dalam R^n , serta T melambangkan transpose. Matriks simetris Q sering disebut Hessian. $x^T Qx$ merepresentasikan bentuk kuadratik.

Fungsi Konveks dan Konkaf

Syarat Fungsi Konveks dan Konkaf Menurut (Varberg dan Purcell, 2010 : 156) Misalkan f terdiferensial untuk semua $x \in R$, dikatakan cekung keatas atau konveks jika $f'(x)$ naik untuk semua $x \in R$ dan dikatakan cekung kebawah atau konkaf jika $f'(x)$ turun untuk semua $x \in R$. Turunan kedua fungsi f adalah turunan pertama dari $f'(x)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa f' naik jika f'' positif dan f' turun jika f'' negatif . Model program konveks dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g_i(x) \le 0 \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(3)$$

Dimana $f\ g_i, ..., g_m : R^n \to R$ adalah fungsi konveks

Fungsi Penalty

Prinsip dasar fungsi penalty adalah mengubah suatu permasalahan yang dibatasi (*constrained*) menjadi suatu permasalahan yang tidak dibatasi (*unconstrained*) dengan menambahkan suatu parameter penalti ke dalam fungsi objektif. Bentuk umum fungsi penalty yaitu:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t} \quad & g(x) = 0 \\ & x \in \Omega \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(4)$$

Prinsip dasar fungsi penalty adalah mengubah suatu permasalahan yang dibatasi (*constrained*) menjadi suatu permasalahan yang tidak dibatasi (*unconstrained*) dengan menambahkan suatu parameter penalti ke dalam fungsi objektif. Dengan menambahkan parameter penalti maka akan meningkatkan nilai dari fungsi objektif ketika batasan dilanggar atau bahkan ketika batasan didekati. Masalah penalty dikatakan memenuhi syarat dan mempunyai solusi minimum jika mendapatkan kondisi yang optimal dilanjutkan dengan menggunakan metode *Lagrange* (Griva S, 2009).

Metode *Lagrange*

Metode Pengali *Lagrange* digunakan untuk mencari titik optimum dari suatu fungsi dengan kendala berbentuk persamaan (penentuan harga ekstrim, dimana terdapat kendala – kendala tertentu:

1. Satu pengali *Lagrange*

Prinsip dari metode ini adalah mencari harga ekstrim (optimisasi) suatu fungsi tujuan $f(x_1, x_2)$

$$\begin{array}{ll} \text{maks/min} & f(x_1, x_2) \\ \text{s.t} & g(x_1, x_2) = 0 \end{array} \qquad \ldots\ldots(5)$$

Fungsi *Lagrange*nya adalah :

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

Parameter λ. disebut sebagai pengali *Lagrange*.

2. Lebih dari satu pengali *Lagrange*

Jika pengali *Lagrange* lebih dari satu kendala, maka penggunaan parameter yang dipilih dapat ditambahkan menjadi λ_1, λ_2 atau parameter yang lainnya.

Misalnya untuk memperoleh nilai ekstrim

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{s.t} & g(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ & h(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{array} \qquad \ldots\ldots(6)$$

Fungsi *Lagrange*nya adalah :

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda, \text{«}) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 g(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 h(x_1, x_2, x_3)$$

dengan syarat perlu :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \text{dengan } i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \text{dengan } i = 1, 2, 3$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_n$ adalah pengali *Lagrange*.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian/riset kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan atau studi literatur yaitu melakukan penelusuran dengan penelaahan terhadap beberapa literatur yang mempunyai relevansi dengan topik pembahasan. Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku referensi, jurnal, maupun dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topik pembahasan

Prosedur yang dilakukan dalam melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi bentuk model program kuadratik dengan fungsi tujuan berbentuk kuadratik dan fungsi kendala berupa fungsi linear.
2. Rekonstruksi model program kuadratik dengan kendala linear.
3. Menentukan model program kuadratik dengan menggunakan fungsi penalty.
4. Menganalisis keoptimalan model program kuadratik untuk melihat solusi yang optimal dengan menggunakan fungsi penalty dan pengali *Lagrange* .
5. Membuat contoh kasus program kuadratik dengan menggunakan fungsi penalty dan metode *Langrange*.
6. Membangun koding program kuadratik dengan kendali parameter penalty.
7. Membangun program dengan aplikasi matlab dan simulasi.

Menarik kesimpulan hasil analisis model program kuadratik menggunakan fungsi penalty.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. HASIL

Program Kuadratik

Program kuadratik merupakan salah satu bagian dari masalah optimisasi nonlinear dimana penyelesaian yang digunakan bertujuan untuk memperoleh nilai yang optimal. Sedangkan fungsi kuadratik merupakan fungsi dimana nilai yang diberikan dalam bentuk kuadrat. Bentuk Program kuadratik tersebut mempunyai bentuk :

$$\begin{aligned} &\min && f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + g^T x && \text{……(7)} \\ &\textit{subject to} && a\,x - b \le c \end{aligned}$$

$$a\ x - b = c$$
$$x \in X$$

dengan x = (x_1, x_2,...x_n)^T, Q adalah matriks simetrik berukuran $n \times n$, *b* adalah matrik 1 × *n* dan $x^T Qx$ adalah mendefinisikan bentuk kuadratik dengan matriks c simetris.

Rekonstruksi Model Program Kuadratik dengan Kendala Linear

Bentuk dari model program kuadratik dengan kendala linear didefinisikan sebagai berikut :

$$\text{minimum} \quad x^T Qx + c^T x \qquad \text{......(8)}$$
$$\textit{subject to} \quad a_i x + b_i \leq c \quad \text{untuk } i = 1, \ldots, m$$

Dimana Q merupakan matriks simetris berukuran $n \times n$,dengan asumsi bahwa model kuadratik adalah konveks.

Fungsi Penalty Pada Program Kuadratik

Pencarian solusi optimal untuk program kuadratik memerlukan fungsi penalty yang digunakan untuk menangani pembatas dari permasalahan program nonlinear. Dengan menggunakan fungsi penalty maka pergerakan nilai optimal yang dihasilkan pada setiap iterasinya dapat diketahui. Berikut ini batasan masalah dari fungsi penalty:

$$\text{min} \quad f(x) \qquad \text{......(9)}$$
$$\text{s.t} \quad g(x) \leq 0$$
$$x \in R^n$$

lalu misalkan fungsi tersebut tidak dibatasi masalah, maka rekonstruksinya menjadi :

$$\text{min} \quad f(x) + \text{ª} R^n \qquad \text{......(10)}$$

dimana $R^n \to R$. adalah fungsi penalty dan ª adalah parameter penaltynya. maka bentuk fungsi penalty pada program kuadratik adalah $x^T Qx + c^T x + \text{ª} R(x)$ dimana $R \geq 0$ dan ª ≥ 0.

Analisis Keoptimalan Program Kuadratik dengan Metode *Lagrange*

Fungsi *Lagrange* dipergunakan untuk menuntaskan fungsi objektif dari sesuatu kasus yang langsung berhubungan dengan fungsi kendalanya. Model optimisasi program kuadratik dengan fungsi Lagrange memiliki bentuk sebagai berikut :

$$\text{min} \quad f(x) = x \in R^n \qquad \text{......(11)}$$
$$\textit{subject to} \quad h_j(x) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, r \ \text{ dan } \ r < n$$

didefinisikan dengan fungsi lagrange sebagai berikut

$$L(x, \text{ª}) = f(x) + \sum_{j=1}^{r} \text{ª}_{i,j} h_{i,j}$$
$$= f(x) + \text{ª}^T h(x)$$

Dimana $f(x)$ adalah fungsi konveks dan $a_{i,j}$ merupakan koefisien real dari variabel tersebut dalam kendala pertidaksamaan ke-***i***.

Penggunaan Program Penalty dengan Metode *Lagrange*

Program Penalty dijadikan sebagai parameter pada metode *lagrange* dan untuk lebih memahami pemakaian metode *Lagrange* akan digunakan contoh berikut ini:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2 \\ \text{s.t} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 28 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 28 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

x_1 dan x_2 bilangan bulat.

Pendekatan *Lagrange*

Ada sebanyak $m = m_1 + mm$ anggota himpunan fungsi kendala. Semuanya mempunyai peluang yang sama untuk dikelompokkan sebagai m_1 (fungsi kendala kompleks). Sehingga ada sebanyak $(2^m - 2)$ kemungkinan yang akan terjadi. Untuk ilustrasi di atas ada 3 fungsi kendala sehingga ada $(2^3 - 2) = 6$ kemungkinan pengali lagrange yang dapat dibentuk.

Metode *Lagrange*

Setelah memilih himpunan fungsi kendala kompleks, pendekatan metode Lagrange dilakukan dengan cara:

1. Membentuk (Q) dan (a)
2. Mencari harga $(a) \geq 0$ dengan cara koefisien tiap variabel pada fungsi tujuan sama dengan nol. Dimana (a) dijadikan sebagai parameter penalty
3. Subtitusikan (a) pada L kemudian cari pasangan variabel bilangan bulat yang bersesuaian dengan harga L maksimum.

Pada kasus I Fungsi kendala (1) dan (2) diambil sebagai fungsi kendala yang yang kompleks. Sehingga bentuk umum dari Q untuk kasus 1 adalah:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2 \\ \text{s.t} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 28 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 28 \\ & x \in R \end{aligned}$$

$$Q = \{x_1, x_2 \in L_2 : 4x_1 + x_2 \leq 28; x_1 + 4x_2 \leq 28\}$$

Untuk syarat konveks dari Q adalah

$$\{x_1, x_2 \in L : x_1 - x_2 \leq 1\} = \max\{L(a_1, a_2) : x_1, x_2)$$

Jurnal Riset Rumpun Ilmu Pendidikan (JURRIPEN)
Vol. 2, No. 1 April 2023
e-ISSN: 2828-8483; p-ISSN: 2828-8432, Hal 32-42

Berikut ini akan dihitung harga a dengan cara koefisien tiap variabel sama dengan nol, yaitu :

$$2 - 4a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow 4a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow (I)$$
$$5 - a_1 - 4a_2 = 0 \Rightarrow a_1 + 4a_2 = 5 \Rightarrow (II)$$
$$28a_1 = 0, \quad 28a_2 = 0$$

Dari persamaan (*I*) didapat

$$4a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 2 - 4a_1$$

Masukkan ke persamaan (*II*)

$$a_1 + 4a_2 = 5$$
$$a_1 + 4\left(2 - 4a_1\right) = 5$$
$$-15a_1 = -3$$
$$a_1 = \frac{1}{5}$$

Subtitusikan ke

$$a_2 = 2 - 4a_1$$
$$a_2 = 2 - \frac{4}{5}$$
$$a_2 = \frac{6}{5}$$

Subtitusikan nilai dari(a_1, a_2) pada L(a_1, a_1) dan akan dicari pada titik ekstrim (x_1, x_2) mana yang memberikan nilai maksimum.

$$L\left(0,0\right) = max\left\{2x_1^{\ 2} + 5x_2 : x_1, x_2 \in Q\right\} = \infty$$

$$L\left(\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right) = \max\left\{\left(2 - 4\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{6}{5}\right)x_1 + \left(5 - \frac{1}{5} - 4\left(\frac{6}{5}\right)\right)x_2 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{5}\right) : x_1, x_2 \in Q\right\}$$

$$L\left(\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right) = \max\left\{\frac{1}{5} + \frac{6}{5} : x_1, x_2 \in Conv\left(Q\right)\right\}$$

$$L = 1,4$$

Dari kasus di atas terlihat bahwa masalah pemrograman kuadratik dengan fungsi penalti dapat diselesaikan dimana a dijadikan sebagai suatu parameter dan dengan menggunakan metode lagrange nilai dari keoptimalan fungsi tersebut didapatkan yaitu $L = 1,4$ dan prosedur penyelesaiannya dihentikan.

PEMBAHASAN

Pada penelitian ini akan dilakukan analisis optimisasi terhadap program kuadratik dengan menggunakan fungsi penalty. Langkah yang dilakukan dimulai dengan mencari model program kuadratik dimana bentuk dari fungsi tujuan nya berbentuk kuadratik dan kendalinya berupa linear. Kemudian dilakukan langkah penyelesaian dengan melakukan perhitungan – perhitungan terhadap model yang telah disusun selanjutnya setelah dilakukan perhitungan akan dianalisis menggunakan metode *Lagrange* sampai didapat hasil yang optimal dan kemudian disimulasikan kedalam aplikasi Matlab.

Berdasarkan hasil penelitian tersebut maka diperoleh nilai dari keoptimalam program kuadratik dengan fungsi penalty dimana fungsi penalty dijadikan sebagai suatu parameter dan nilai dari keoptimalan fungsi tersebut ditunjukkan dengan menampilkan solusi terbaik yaitu solusi minimum global sehingga prosedur penyelesaiannya dihentikan.

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah disajikan disimpulkan bahwa untuk memperoleh penyelesaian keoptimalan dari program kuadratik *(quadratic programing)* dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi penalty dengan memperhatikan syarat dari metode lagrange dan syarat optimisasi program kuadratik dikatakan memiliki solusi yaitu apabila telah didapat kondisi yang optimal *(global/local)* serta berlaku beberapa langkah iterasi sampai syarat dari optimisasi tersebut terpenuhi atau mempunyai penyelesaian optimal.

B. Saran

Pada penelitian ini metode yang digunakan bukanlah satu – satunya metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan program kuadratik, tetapi masih ada metode – metode lainnya seperti metode Penalty Interior dan lainya. Bagi pembaca yang ingin mengembangkan lebih lanjut tentang Penelitian ini dapat membahasnya menggunakan optimisasi pada kelas masalah program kuadratik yang berbeda dari sebelumnya.

DAFTAR REFERENSI

Bazaraa, Mokhtar S. & Shetty, C. M. (1979). Nonlinear Programming: Theory And Algorithms. John Wiley and Sons, New Jersey.

Bazaraa, Mokhtar S. & Shetty, C. M. (2006). Nonlinear Programming: Theory And Algorithms Third Edition. John Wiley and Sons, New Jersey.

Belotti, P., Kirches, C., Leyffer, S., Linderoth, J.,Luedtke, J. & Mahajan, A.

Dimyati, T.T. & Dimyati, A. (1999). Operations Research; Model-model Pengambilan Keputusan. Bandung: Sinar Baru Algensindo

Guenin, B., Konemann, J. & Tuncel, L. (2014). A Gentle Introduction To Optimization, University of Waterloo, Ontario.

G. Dipillo, L.Grippoand S.Lucidi. (1985). "Global convergen tex act penalty algorithm sfor constrained optimization", Contributed paper, 12 tb IFIP Conferenceon System Modelling and Optimization, Budapest.

Griva, I., Nash, S. G., Sofer, A., Linear and Non Linear Optimization, SIAM, Philadelphia, 2009

Hariadi, V. (2009). Analisa Pemanfaatan Fungsi Penalti Pada Komputasi Penyelesaian Permasalahan Optimisasi Nonlinear. Jurnal Ilmiah Kursor, 5: 40 - 47.

H. A, Parhusip. (2014). Optimasi taklinier (berdasarkan data-data penelitian, disertai program MATLAB 6.5). Salatiga:Tisara Grafika.

Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2001). Introduction to Operations Research, Seventh Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

Rao, S. S. (2009). Engineering Optimization Theory and Practice 4th ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

Tjolleng, A. (2017). Pengantar Pemrograman MATLAB. Jakarta: PT. Elex Media Komputindo

Varberg, D. dan Purcell, E.J.(2010). Kalkulus, Jilid Dua. Binarupa Aksara.

Winston, W. L. (2003). Operations Research: Application. Boston: Duxbury Press