



Solusi Umum Persamaan Diferensial Biasa Linear Koefisien Konstan dengan Menggunakan Metode Reduksi Orde

Elisabet Djunaidy

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Kristen Tentena, Indonesia

Korespondensi penulis: elisabetdjunaidy@gmail.com*

Abstract. Differential equations involve derivatives of unknown functions and are widely used in mathematical modeling of various real-world problems. They can be classified based on linearity, homogeneity, coefficients, number of independent variables, degree, and order, thus requiring appropriate solution methods. One commonly used approach is the reduction of order method, which simplifies equations by reducing their order step by step. However, this method generally requires the solution of the corresponding homogeneous equation as an initial step. This study aims to solve nonhomogeneous linear ordinary differential equations of order n with constant coefficients using the reduction of order method without determining the homogeneous solution. This research is a theoretical study based on relevant references concerning solution methods and types of differential equations. The procedure consists of two main stages: determining the fundamental symmetric polynomial variables based on the coefficients and constructing a sequence of solutions through first-order linear differential equations obtained from the reduction process. The results show that this method systematically produces the general solution of linear differential equations of n -order, making it an effective and efficient alternative approach.

Keywords: Constant coefficient; Differential equation; First order; Order reduction; Symmetric polynomial.

Abstrak. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat turunan dari fungsi tak diketahui dan banyak digunakan dalam pemodelan matematika untuk berbagai permasalahan nyata. Persamaan diferensial memiliki beragam jenis yang diklasifikasikan berdasarkan kelinearan, kehomogenan, koefisien, jumlah variabel bebas, derajat, dan orde, sehingga diperlukan metode penyelesaian yang sesuai. Salah satu metode yang digunakan adalah metode reduksi orde, yaitu metode yang menyederhanakan persamaan diferensial dengan menurunkan orde persamaan secara bertahap. Namun, metode ini umumnya memerlukan solusi dari persamaan homogen sebagai langkah awal. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear tak homogen orde- n dengan koefisien konstan menggunakan metode reduksi orde tanpa melibatkan solusi persamaan homogen. Penelitian ini merupakan kajian teoritis yang mengacu pada berbagai referensi terkait metode penyelesaian dan jenis persamaan diferensial. Prosedur penelitian terdiri atas dua tahap utama, yaitu penentuan polinomial simetri dasar berdasarkan koefisien persamaan serta pembentukan barisan solusi melalui persamaan diferensial linear orde satu hasil reduksi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini mampu menghasilkan solusi umum persamaan diferensial linear orde- n secara sistematis, sehingga dapat menjadi alternatif yang efektif dan efisien.

Kata kunci: Koefisien konstan; Orde satu; Persamaan diferensial; Polinomial simetri; Reduksi orde.

1. LATAR BELAKANG

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat paling sedikit satu turunan dari fungsi yang tidak diketahui (Purnomo, 2021). Persamaan diferensial dapat ditemukan pada pemodelan matematika yang berperan sebagai pembuat rencana dan keputusan berdasarkan situasi nyata. Jenis persamaan diferensial diklasifikasi berdasarkan kelinearan, kehomogenan, koefisien, jumlah variabel bebas, derajat, dan orde. Dari banyaknya jenis persamaan diferensial menjadikan terdapat banyak pula metode penyelesaian persamaan tersebut (Yuhanna, Efendi, & Narwen, 2019; Boyce & DiPrima, 2017).

Metode reduksi orde adalah metode penyelesaian persamaan diferensial linear dengan cara mengubah persamaan menjadi orde yang lebih rendah dan membentuk solusi umum persamaan diferensial linear dengan menggunakan solusi persamaan orde yang lebih rendah

tersebut. Secara umum, metode reduksi orde menggunakan solusi dari persamaan homogen dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear. Metode ini banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial orde dua maupun orde yang lebih tinggi karena kemampuannya dalam menyederhanakan proses penyelesaian (Al-Tae & Fawze, 2022; Dinda Renata Cecilia et al.2025; Lubis 2025).

Selain itu, perkembangan penelitian menunjukkan bahwa konsep reduksi orde tidak hanya terbatas pada persamaan linear sederhana, tetapi juga dapat dikembangkan pada berbagai bentuk persamaan diferensial yang lebih kompleks, baik secara analitik maupun numerik (Wang et al., 2024; Laelasari et al.2025; Lubis 2025).

Pada tahun 2023, Ramadhita menyelesaikan persamaan diferensial biasa tak homogen koefisien konstan orde dua dengan menggunakan metode reduksi orde tanpa solusi dari persamaan homogen. Penelitian ini merupakan kajian teori yang merujuk pada referensi terkait metode penyelesaian dan jenis persamaan diferensial. Tujuan penelitian adalah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear tak homogen koefisien konstan orde- n dengan menggunakan metode reduksi orde tanpa solusi dari persamaan homogen (Ramadhita, Noviani, & Yudhi, 2023; Hadawang et al.2025).

2. KAJIAN TEORITIS

Dasar teori yang menunjang penelitian ini meliputi polinomial simetris dasar, persamaan diferensial linear orde satu, dan metode reduksi orde (Nasution et al. 2025).

Polinomial Simetris Dasar

Untuk suatu k bilangan asli, $1 \leq k \leq n$, polinomial simetris dasar, a_k , dalam n variabel didefinisikan sebagai [3]

$$a_k(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k},$$

yang berarti bahwa

$$a_1(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} r_{i_1} = r_1 + r_2 + \dots + r_n,$$

$$a_2(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} r_{i_1} r_{i_2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_3(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

dan seterusnya hingga

$$a_n(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}.$$

Selain daripada itu, polinomial simetris dasar, untuk $k = 0$, ialah $a_0(r_1, r_2, \dots, r_n) = 1$ dan untuk $k > n$, maka $a_k(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$.

Polinomial simetris dasar merupakan konsep penting dalam aljabar, khususnya dalam teori persamaan polinomial yang menghubungkan akar-akar dengan koefisien polinomial (Ramadhan & Septiarini, 2025). Konsep ini juga berkaitan erat dengan persamaan karakteristik pada persamaan diferensial linear koefisien konstan, sehingga berperan dalam pembentukan solusi umum (Stanley, 2012). Dengan demikian, pemahaman terhadap polinomial simetris dasar menjadi landasan penting dalam analisis struktur solusi persamaan diferensial.

Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Satu

Bentuk persamaan diferensial biasa orde satu, yaitu [2]:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \quad (2.1)$$

dengan g adalah suatu fungsi yang diberikan, x sebagai variabel bebas, dan y sebagai variabel terikat. Persamaan (2.1) dikatakan linear jika fungsi g linear pada y dan berbentuk

$$g(x, y) = f(x) - p(x)y. \quad (2.2)$$

Pada persamaan (2.2), f dan p adalah fungsi dari variabel bebas x . Substitusi persamaan (2.2) ke persamaan (2.1) menjadi

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (2.3)$$

dengan p dan f adalah fungsi kontinu. Secara umum, persamaan (2.3) ditemukan sebagai berikut:

$$Q(x)y' + R(x)y = F(x). \quad (2.4)$$

Dengan $Q(x) \neq 0$, persamaan (2.4) dibagi $Q(x)$ menjadi persamaan (2.3). Oleh karena $p(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ dan $f(x) = \frac{F(x)}{Q(x)}$. Jika persamaan (2.1) tidak berbentuk persamaan (2.3) maupun persamaan (2.4), maka persamaan (2.1) tidak linear.

Persamaan linear orde satu dikatakan homogen jika suku $f(x)$ pada persamaan (2.3) atau $F(x)$ pada persamaan (2.4) bernilai nol untuk seluruh x . Persamaan (2.4) homogen jika $Q(x)y' + R(x)y = 0$. Sebaliknya, persamaan tersebut dikatakan tidak homogen. Solusi persamaan (2.3) adalah

$$y = e^{\int -p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx.$$

Persamaan diferensial linear orde satu memiliki peranan penting dalam berbagai aplikasi seperti model pertumbuhan, peluruhan, dan sistem dinamis sederhana. Metode faktor

integrasi merupakan teknik utama dalam penyelesaiannya karena dapat mengubah persamaan menjadi bentuk yang lebih mudah diselesaikan (Zill, 2018). Selain itu, konsep ini menjadi dasar dalam memahami persamaan diferensial orde lebih tinggi.

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode reduksi orde. Metode ini memiliki tahapan penyelesaian yang dilakukan secara sistematis (Sinkala & Kakuli, 2022). Tahap pertama adalah menerapkan operator D pada persamaan diferensial dan menentukan faktor dari persamaan tersebut. Selanjutnya, dilakukan reduksi orde persamaan diferensial secara bertahap melalui substitusi fungsi hingga diperoleh persamaan dengan orde yang lebih rendah. Setelah itu, ditentukan solusi dari persamaan diferensial linear orde satu yang dihasilkan, dan langkah terakhir adalah menggabungkan solusi tersebut untuk memperoleh solusi umum persamaan diferensial semula.

Selanjutnya, misalkan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien konstan (Ramadhita, Noviani, & Yudhi, 2023)

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \quad (3.1)$$

dengan a_1, a_2 merupakan konstanta, f adalah fungsi kontinu pada interval I , x sebagai variabel bebas, dan $y = y(x)$.

Persamaan (3.1) menerapkan konsep turunan dengan menggunakan operator D , yaitu sebagai

$$D^2y + a_1Dy + a_0y = f(x)$$

atau

$$(D^2 + a_1D + a_0)y = f(x)$$

Dengan memfaktorkan operator diperoleh

$$(D + r_1)(D + r_2)y = f(x)$$

Karena $a_1 = r_1 + r_2$ dan $a_2 = r_1r_2$, maka r_1 dan r_2 konstan dan persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi

$$y'' + (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = f(x). \quad (3.2)$$

Hasil reduksi persamaan (3.2) diperoleh sebagai berikut:

$$(y' + r_2y)' + r_1(y' + r_2y) = f(x). \quad (3.3)$$

Misalkan

$$y' + r_2y = u_1, \quad (3.4)$$

maka persamaan (3.3) menjadi

$$u_1' + r_1u_1 = f(x). \quad (3.5)$$

Persamaan (3.4) dan (3.5) merupakan persamaan linear orde satu. Solusi persamaan (3.4) yang merupakan solusi dari persamaan linear orde dua tak homogen dengan koefisien konstan adalah

$$y = e^{-r_2x} \int u_1 e^{r_2x} dx, \quad (3.6)$$

di mana dari persamaan (3.5) diperoleh

$$u_1 = e^{-r_1x} \int f(x) e^{r_1x} dx. \quad (3.7)$$

Dengan demikian berdasarkan persamaan (3.6) dan (3.7), solusi dari persamaan diferensial biasa linear orde dua tak homogen dengan koefisien konstan dapat pula ditulis menjadi

$$y = e^{-r_2x} \int e^{(r_2-r_1)x} \left[\int f(x) e^{r_1x} dx \right] dx.$$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini akan mengarah pada penerapan Metode Reduksi Orde untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde n koefisien konstan dan contoh terkait persamaan. Metode reduksi orde merupakan salah satu teknik analitik yang digunakan untuk menyederhanakan persamaan diferensial dengan menurunkan orde secara bertahap hingga diperoleh bentuk yang lebih mudah diselesaikan (Al-Tae & Fawze, 2022).

Solusi Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde n Koefisien Konstan

Misalkan persamaan diferensial biasa linear orde n dengan koefisien konstan

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (4.1)$$

$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ merupakan konstanta, f adalah fungsi kontinu pada interval I , x sebagai variabel bebas, dan $y = y(x)$. Persamaan ini merupakan bentuk umum persamaan diferensial linear koefisien konstan yang sering digunakan dalam berbagai model matematika dan analisis sistem dinamis (Boyce & DiPrima, 2017).

Dengan menerapkan konsep operator D , persamaan (4.1) menjadi

$$\begin{aligned} D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y &= f(x) \\ (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y &= f(x) \\ (D + r_1)(D + r_2) \dots (D + r_n) y &= f(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Berdasarkan definisi polinomial simetris dasar dan persamaan (4.2), konstanta $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ didefinisikan menjadi

$$\begin{aligned}
 a_1 &= r_1 + r_2 + \dots + r_n = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} r_{i_1} \\
 a_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \\
 &\vdots \\
 a_{n-1} &= r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_{n-1} + r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_n + \dots + r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_{n-1}} \\
 a_n &= r_1 r_2 \dots r_n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$a_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_j}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.3)$$

merupakan polinomial simetri dasar. Berdasarkan n polinomial tersebut, n variabel yang diperoleh dapat berupa akar penyelesaian berulang, berbeda, dan imajiner.

Persamaan (4.1) dapat ditulis berdasarkan nilai dari persamaan (4.3) menjadi

$$y^{(n)} + \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq n} r_{i_1} \right) y^{(n-1)} + \dots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \right) y = f(x). \quad (4.4)$$

Hasil reduksi persamaan (4.4) diperoleh sebagai berikut:

$$u_1' + r_1 u_1 = f(x), \quad (4.5)$$

dengan

$$y^{(n-1)} + \left(\sum_{2 \leq i_1 \leq n} r_{i_1} \right) y^{(n-2)} + \dots + \left(\sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \right) y = u_1. \quad (4.6)$$

Persamaan (4.5) dan (4.6) merupakan persamaan linear orde satu dan $n - 1$. Solusi persamaan (4.5) adalah

$$u_1 = e^{-r_1 x} \int f(x) e^{r_1 x} dx. \quad (4.7)$$

Solusi persamaan (4.6) dapat diperoleh melalui reduksi persamaan sebagai berikut:

$$u_2' + r_2 u_2 = u_1, \quad (4.8)$$

dengan

$$y^{(n-2)} + \left(\sum_{3 \leq i_1 \leq n} r_{i_1} \right) y^{(n-3)} + \dots + \left(\sum_{3 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \right) y = u_2. \quad (4.9)$$

Persamaan (4.8) dan (4.9) merupakan persamaan diferensial linear orde satu dan $n - 2$. Solusi persamaan (4.8) adalah

$$u_2 = e^{-r_2x} \int u_1 e^{r_2x} dx. \quad (4.10)$$

Dengan tahapan penyelesaian dari persamaan (4.6)-(4.9), solusi persamaan (4.9) dapat diperoleh dengan cara mereduksi orde hingga persamaan tersebut berorde satu.

Solusi persamaan diferensial biasa linear orde n dengan koefisien konstan adalah

$$y = e^{-r_nx} \int u_{n-1} e^{r_nx} dx, \quad (4.11)$$

dengan

$$u_1 = e^{-r_1x} \int f(x) e^{r_1x} dx,$$

$$u_2 = e^{-r_2x} \int u_1 e^{r_2x} dx,$$

⋮

$$u_{n-1} = e^{-r_{n-1}x} \int u_{n-2} e^{r_{n-1}x} dx.$$

Selain dari (4.11), solusi dari persamaan diferensial biasa linear orde n dengan koefisien konstan dapat ditulis dalam bentuk

$$y = e^{-r_nx} \int e^{(r_n-r_{n-1})x} \dots \left[\int e^{(r_2-r_1)x} \left[\int f(x) e^{r_1x} dx \right] dx \right] \dots dx. \quad (4.12)$$

Misalkan $y = u_n$ dan $f(x) = u_0$, maka solusi (4.12) dapat ditulis menjadi

$$y = u_n(u_{n-1}(\dots(u_2(u_1)) \dots)), \quad (4.13)$$

dengan $\forall j \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}, u_j = e^{-r_jx} \int u_{j-1} e^{r_jx} dx$.

Dengan demikian, solusi diperoleh dalam bentuk integral bertingkat yang bergantung pada fungsi $f(x)$ dan akar-akar karakteristik r_j

Contoh Penggunaan Metode Reduksi Orde

Untuk memperjelas penerapan metode reduksi orde, pada bagian ini diberikan beberapa contoh penyelesaian persamaan diferensial biasa linear dengan koefisien konstan. Setiap langkah penyelesaian tetap disajikan secara matematis, namun disertai penjelasan untuk memudahkan pemahaman.

Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Tiga Koefisien Konstan

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial orde tiga berikut:

$$y''' - 9y'' + 27y' - 27y = e^{3x} \sin(x). \quad (4.14)$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode reduksi orde, langkah pertama ialah penentuan nilai $r_1, r_2,$ dan r_3 berdasarkan persamaan (4.14), yaitu sebagai berikut:

$$y''' + (r_1 + r_2 + r_3)y'' + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)y' + (r_1r_2r_3)y = f(x). \quad (4.15)$$

Sehingga

$$r_1 + r_2 + r_3 = -9 \quad (4.16)$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 27 \quad (4.17)$$

$$r_1r_2r_3 = -27 \quad (4.18)$$

Substitusikan $r_2 + r_3 = -9 - r_1$ dari persamaan (4.16) dan $r_2r_3 = -\frac{27}{r_1}$ dari persamaan

(4.18) ke persamaan (4.17), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} r_1(r_2 + r_3) + r_2r_3 &= 27 \\ \Leftrightarrow r_1(-9 - r_1) - \frac{27}{r_1} &= 27 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Persamaan (1.6) dikalikan dengan $-r_1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 9r_1^2 + r_1^3 + 27 &= -27r_1 \\ \Leftrightarrow r_1^3 + 9r_1^2 + 27r_1 + 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r_1 + 3)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Jadi, persamaan (4.20) memiliki nilai akar yang sama, $r_1 = -3$. Substitusikan nilai r_1 ke persamaan (4.16) dan (4.18) diperoleh r_2 dan r_3 , yaitu -3 .

Selanjutnya, langkah kedua adalah menentukan $u_1, u_2,$ dan u_3 , yaitu

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-r_1x} \int f(x)e^{r_1x} dx \\ &= e^{3x} \int (e^{3x} \sin(x)) e^{-3x} dx \\ &= e^{3x} \int \sin(x) dx \\ &= e^{3x}(-\cos(x) + c_1), \\ u_2 &= e^{-r_2x} \int u_1 e^{r_2x} dx \\ &= e^{3x} \int (e^{3x}(-\cos(x) + c_1)) e^{-3x} dx \\ &= e^{3x} \int (-\cos(x) + c_1) dx \\ &= e^{3x}(-\sin(x) + c_1x + c_2), \\ u_3 &= e^{-r_3x} \int u_2 e^{r_3x} dx, \text{ yaitu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{3x} \int (e^{3x}(-\sin(x) + c_1x + c_2))e^{-3x} dx \\
&= e^{3x} \int (-\sin(x) + c_1x + c_2) dx \\
&= e^{3x} \left(\cos(x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \right).
\end{aligned}$$

Jadi, solusi dari persamaan (4.14) adalah $y = e^{3x} \left(\cos(x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \right)$. Hasil ini menunjukkan bahwa metode reduksi orde mampu menangani kasus dengan akar kembar serta fungsi trigonometri pada ruas kanan.

Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Empat Koefisien Konstan

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial orde empat berikut:

$$y^{(4)} - 4y'' = x^2 + e^x. \quad (4.21)$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode reduksi orde, langkah pertama ialah penentuan nilai r_1, r_2, r_3, r_4 berdasarkan persamaan (4.21), yaitu sebagai berikut:

$$y^{(4)} + \left(\sum_{i_1=1}^4 r_{i_1} \right) y'''' + \dots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4} r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} r_{i_4} \right) y = f(x). \quad (4.22)$$

Dari persamaan karakteristik diperoleh:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \quad (4.23)$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = -4 \quad (4.24)$$

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 0 \quad (4.25)$$

$$r_1r_2r_3r_4 = 0 \quad (4.26)$$

Substitusikan $r_2 + r_3 + r_4 = -r_1$ dari persamaan (4.23) ke persamaan (4.24)

$$\begin{aligned}
r_1(r_2 + r_3 + r_4) + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 &= -4 \\
\Leftrightarrow r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 &= r_1^2 - 4 \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Substitusikan $r_2r_3r_4 = 0$ dari persamaan (4.26) dan $r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = r_1^2 - 4$ dari persamaan (4.27) ke persamaan (4.25)

$$\begin{aligned}
r_1(r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) + r_2r_3r_4 &= 0, \text{ dengan } r_1 \neq 0 \\
\Leftrightarrow r_1(r_1^2 - 4) &= 0 \\
\Leftrightarrow r_1(r_1 - 2)(r_1 + 2) &= 0.
\end{aligned}$$

Diperoleh $r_1 = -2$ atau $r_1 = 0$ atau $r_1 = 2$. Karena berdasarkan persamaan (4.26) bahwa $r_1 \neq 0$, maka nilai $r_1 = -2$ atau $r_1 = 2$. Jika nilai $r_1 = -2$ disubstitusikan ke persamaan (4.23), (4.26), dan (4.27), persamaan-persamaan tersebut menjadi

$$r_3 + r_4 = 2 - r_2 \quad (4.28)$$

$$r_3 r_4 = 0, \text{ dengan } r_2 \neq 0 \quad (4.29)$$

$$r_2(r_3 + r_4) + r_3 r_4 = 0 \quad (4.30)$$

Dari persamaan (4.28)-(4.30) diperoleh $r_2(2 - r_2) = 0$, maka nilai $r = 2$. Substitusi nilai r_2 ke persamaan (4.28) diperoleh

$$r_3 + r_4 = 0. \quad (4.31)$$

Berdasarkan persamaan (4.29) dan (4.31), nilai $r_3 = r_4 = 0$. Dengan demikian, $r_1 = -2$,

$r_2 = 2, r_3 = r_4 = 0$. Atau nilai $r_1 = 2, r_2 = -2, r_3 = r_4 = 0$.

Langkah kedua adalah menentukan u_1, u_2, u_3 , dan u_4 , yaitu

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-r_1 x} \int f(x) e^{r_1 x} dx \\ &= e^{2x} \int (x^2 + e^x) e^{-2x} dx \\ &= e^{2x} \int (x^2 e^{-2x} + e^{-x}) dx \\ &= e^{2x} \left(e^{-2x} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - e^{-x} + c_1 \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - e^x + c_1 e^{2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-r_2 x} \int u_1 e^{r_2 x} dx \\ &= e^{-2x} \int \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - e^x + c_1 e^{2x} \right) e^{2x} dx \\ &= e^{-2x} \int \left(-\frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - e^{3x} + c_1 e^{4x} \right) dx \\ &= e^{-2x} \left(-\frac{x^2}{4} e^{2x} - \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{c_1}{4} e^{4x} + c_2 \right) \\ &= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} e^x + \frac{c_1}{4} e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= e^{-r_3 x} \int u_2 e^{r_3 x} dx \\ &= \int \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} e^x + \frac{c_1}{4} e^{2x} + c_2 e^{-2x} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} - \frac{1}{3}e^x + \frac{c_1}{8}e^{2x} - \frac{c_2}{2}e^{-2x} + c_3, \\
u_4 &= e^{-r_4x} \int u_3 e^{r_4x} dx \\
&= \int \left(-\frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} - \frac{1}{3}e^x + \frac{c_1}{8}e^{2x} - \frac{c_2}{2}e^{-2x} + c_3 \right) dx \\
&= -\frac{x^4}{48} - \frac{x^2}{16} - \frac{1}{3}e^x + \frac{c_1}{16}e^{2x} + \frac{c_2}{4}e^{-2x} + c_3x + c_4.
\end{aligned}$$

Jadi, solusi dari persamaan (4.21) adalah

$$y = -\frac{x^4}{48} - \frac{x^2}{16} - \frac{e^x}{3} + \frac{c_1}{16}e^{2x} + \frac{c_2}{4}e^{-2x} + c_3x + c_4.$$

Hasil ini memperlihatkan bahwa metode reduksi orde mampu menangani kombinasi fungsi ruas kanan berupa polinomial dan eksponensial secara sistematis.

Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Lima Koefisien Konstan

Ditentukan solusi umum dari persamaan diferensial:

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0. \quad (4.32)$$

Persamaan ini merupakan persamaan diferensial linear homogen orde lima dengan koefisien konstan. Oleh karena itu, metode reduksi orde dapat diterapkan untuk menurunkan orde persamaan secara bertahap hingga diperoleh solusi umum.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode reduksi orde, langkah pertama ialah penentuan nilai r_1, r_2, \dots, r_5 berdasarkan persamaan (4.32) sebagai berikut:

$$y^{(5)} + \left(\sum_{i=1}^5 r_i \right) y^{(4)} + \dots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 5} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_5} \right) y = f(x). \quad (4.33)$$

Sehingga melalui persamaan (4.32) dan (4.33) diperoleh

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = -3, \quad (4.34)$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_1r_5 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5 = 3, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
&r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + r_1r_3r_4 + r_1r_3r_5 + r_1r_4r_5 \\
&\quad + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5 = -3, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$r_1r_2r_3r_4 + r_1r_2r_3r_5 + r_1r_2r_4r_5 + r_1r_3r_4r_5 + r_2r_3r_4r_5 = 2, \quad (4.37)$$

$$r_1r_2r_3r_4r_5 = 0. \quad (4.38)$$

Persamaan (4.38) menunjukkan bahwa setidaknya salah satu akar bernilai nol, yang menjadi indikasi bahwa solusi akan mengandung komponen konstan.

Selanjutnya dilakukan eliminasi bertahap untuk menyederhanakan sistem. Dengan mensubstitusikan $r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = -3 - r_1$ dari persamaan (4.34) ke persamaan (4.35) diperoleh:

$$\begin{aligned} r_1(r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5 &= 3, \\ \Leftrightarrow r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5 &= r_1^2 + 3r_1 + 3. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Substitusikan persamaan (4.39) ke persamaan (4.36) menghasilkan

$$\begin{aligned} r_1(r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5) + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5 &= -3, \\ \Leftrightarrow r_1(r_1^2 + 3r_1 + 3) + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5 &= -3, \\ \Leftrightarrow r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5 &= -r_1^3 - 3r_1^2 - 3r_1 - 3. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substitusikan $r_2r_3r_4r_5 = 0$ dari persamaan (4.38) dan persamaan (4.40) ke persamaan (4.37)

$$\begin{aligned} r_1(r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5) + r_2r_3r_4r_5 &= 2 \text{ dengan } r_1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow r_1(-r_1^3 - 3r_1^2 - 3r_1 - 3) &= 2 \\ \Leftrightarrow r_1^4 + 3r_1^3 + 3r_1^2 + 3r_1 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r_1 + 1)(r_1 + 2)(r_1^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $r_1 = -2$ atau $r_1 = -1$ atau $r_1 = -i$ atau $r_1 = i$.

Proses ini menunjukkan bahwa sistem memiliki kombinasi akar real dan kompleks yang akan menghasilkan solusi berupa fungsi eksponensial dan trigonometri.

Jika nilai $r_1 = -2$ disubstitusikan ke persamaan (4.34), maka persamaan berikut diperoleh

$$r_3 + r_4 + r_5 = -1 - r_2 \quad (4.41)$$

Substitusikan $r_1 = -2$ dan persamaan (4.41) ke persamaan (4.39)

$$r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5 = 1 + r_2 + r_2^2 \quad (4.42)$$

Substitusikan $r_1 = -2$ dan persamaan (4.42) ke persamaan (4.40)

$$r_3r_4r_5 = -1 - r_2(1 + r_2 + r_2^2) \quad (4.43)$$

Berdasarkan persamaan (4.38), $r_3r_4r_5 = 0$, dengan $r_1, r_2 \neq 0$, dan persamaan (4.43), nilai r_2 dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r_2^3 + r_2^2 + r_2 + 1 &= 0, \\ (r_2 + 1)(r_2^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, $r_2 = -1$ atau $r_2 = -i$ atau $r_2 = i$.

Substitusikan $r_2 = -1$ ke persamaan (4.41)

$$r_4 + r_5 = -r_3 \quad (4.44)$$

Substitusikan $r_2 = -1$ dan persamaan (4.44) ke persamaan (4.42)

$$r_4 r_5 = r_3^2 + 1 \quad (4.45)$$

Berdasarkan persamaan (4.38), $r_4 r_5 = 0$, dengan $r_1, r_2, r_3 \neq 0$, dan persamaan (4.45), nilai r_3 dapat menjadi

$$r_3^2 + 1 = 0.$$

Jadi, $r_3 = -i$ atau $r_3 = i$. Apabila $r_3 = -i$, $r_4 \neq 0$, dan $r_5 = 0$, maka $r_4 = i$. Dengan demikian, salah satu solusi dari nilai r_1, r_2, \dots, r_5 , ialah sebagai berikut:

$$r_1 = -2, r_2 = -1, r_3 = -i, r_4 = i, r_5 = 0.$$

Langkah kedua adalah menentukan u_1, u_2, u_3, u_4 , dan u_5 , yaitu

$$u_1 = e^{-r_1 x} \int f(x) e^{r_1 x} dx$$

$$= e^{2x} \int (0) e^{-2x} dx$$

$$= c_1 e^{2x},$$

$$u_2 = e^{-r_2 x} \int u_1 e^{r_2 x} dx$$

$$= e^x \int (c_1 e^{2x}) e^{-x} dx$$

$$= e^x \int c_1 e^x dx$$

$$= e^x (c_1 e^x + c_2)$$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 e^x,$$

$$u_3 = e^{-r_3 x} \int u_2 e^{r_3 x} dx$$

$$= e^{ix} \int (c_1 e^{2x} + c_2 e^x) e^{-ix} dx$$

$$= e^{ix} \int (c_1 e^{(2-i)x} + c_2 e^{(1-i)x}) dx$$

$$= e^{ix} \left(\frac{c_1}{2-i} e^{(2-i)x} + \frac{c_2}{1-i} e^{(1-i)x} + c_3 \right)$$

$$= \frac{c_1}{2-i} e^{2x} + \frac{c_2}{1-i} e^x + c_3 e^{ix},$$

$$u_4 = e^{-r_4 x} \int u_3 e^{r_4 x} dx$$

$$= e^{-ix} \int \left(\frac{c_1}{2-i} e^{2x} + \frac{c_2}{1-i} e^x + c_3 e^{ix} \right) e^{ix} dx$$

$$= e^{-ix} \int \left(\frac{c_1}{2-i} e^{(2+i)x} + \frac{c_2}{1-i} e^{(1+i)x} + c_3 e^{2ix} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-ix} \left(\frac{c_1}{5} e^{(2+i)x} + \frac{c_2}{2} e^{(1+i)x} + \frac{c_3}{2i} e^{2ix} + c_4 \right) \\
 &= \frac{c_1}{5} e^{2x} + \frac{c_2}{2} e^x + \frac{c_3}{2i} e^{ix} + c_4 e^{-ix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_5 &= e^{-r_5 x} \int u_4 e^{r_5 x} dx \\
 &= \int \left(\frac{c_1}{5} e^{2x} + \frac{c_2}{2} e^x + \frac{c_3}{2i} e^{ix} + c_4 e^{-ix} \right) dx \\
 &= \frac{c_1}{10} e^{2x} + \frac{c_2}{2} e^x - \frac{c_3}{2} e^{ix} - \frac{c_4}{i} e^{-ix} + c_5 \\
 &= \frac{c_1}{10} e^{2x} + \frac{c_2}{2} e^x - \frac{c_3}{2} (\cos(x) + i \sin(x)) - \frac{c_4}{i} (\cos(x) - i \sin(x)) + c_5 \\
 &= \frac{c_1}{10} e^{2x} + \frac{c_2}{2} e^x - \left(\frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{i} \right) \cos(x) - \left(\frac{c_3}{2} i - c_4 \right) \sin(x) + c_5 \\
 &= \mathbb{C}_1 e^{2x} + \mathbb{C}_2 e^x + \mathbb{C}_3 \cos(x) + \mathbb{C}_4 \sin(x) + \mathbb{C}_5,
 \end{aligned}$$

dengan $\mathbb{C}_1 = \frac{c_1}{10}$, $\mathbb{C}_2 = \frac{c_2}{2}$, $\mathbb{C}_3 = -\left(\frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{i}\right)$, $\mathbb{C}_4 = -\left(\frac{c_3}{2} i - c_4\right)$, $\mathbb{C}_5 = c_5$

Jadi, solusi dari persamaan (4.32) adalah

$$y = \mathbb{C}_1 e^{2x} + \mathbb{C}_2 e^x + \mathbb{C}_3 \cos(x) + \mathbb{C}_4 \sin(x) + \mathbb{C}_5.$$

Bentuk solusi ini sesuai dengan akar-akar karakteristik yang diperoleh, yaitu $r = -2, -1, 0, i$, dan $-i$. Akar real menghasilkan fungsi eksponensial, akar nol menghasilkan konstanta, sedangkan pasangan akar kompleks menghasilkan fungsi trigonometri.

Dengan demikian, solusi akhir merupakan kombinasi fungsi eksponensial, trigonometri, dan konstanta, yang menunjukkan bahwa metode reduksi orde memberikan hasil yang konsisten dengan teori umum persamaan diferensial linear orde tinggi.

5. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diperoleh solusi umum dari persamaan diferensial biasa linear koefisien konstan orde n dengan menggunakan metode reduksi orde, yaitu pada persamaan (4.13). Metode ini dapat diterapkan dengan mengikuti dua langkah penyelesaian. Langkah pertama menentukan n variabel polinomial simetris dasar berdasarkan koefisien persamaan. Variabel-variabel tersebut dapat berbentuk akar penyelesaian berulang, berbeda, dan imajiner. Langkah kedua menentukan barisan n solusi persamaan diferensial linear orde satu. Solusi ke- n merupakan solusi umum dari persamaan diferensial linear orde n koefisien konstan.

DAFTAR REFERENSI

- Al-Tae, L. H., & Fawze, A. A. M. (2022). *Order reduction method and its application to singular perturbed delay differential equations. Mathematical Statistician and Engineering Applications*, 71(4), 5110–5124.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems* (7th ed.). John Wiley & Sons.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary differential equations and boundary value problems* (10th ed.). Wiley.
- Loehr, N. A. (2010). *Bijjective combinatorics*. CRC Press.
- Maswar, & Mujib, A. (2022). Analisis metode mutua dan aplikasinya terhadap diferensial linear orde-n. *Kadikma*, 13(3), 175–190.
- Purnomo, D. (2021). *Persamaan diferensial*. Media Nusa Creative.
- Ramadhan, Y. I., & Septiarini, T. W. (2025, February). Pembentukan polinomial berderajat genap dengan akar-akar bilangan kompleks. Dalam *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 1, hlm. 903–909).
- Ramadhita, F. F., Noviani, E., & Yudhi. (2023). Penyelesaian persamaan diferensial biasa tak homogen dan visualisasi grafik solusi dengan Desmos. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya*, 12(1), 117–124. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v12i1.63396>
- Sinkala, W., & Kakuli, M. C. (2022). On the method of differential invariants for solving higher order ordinary differential equations. *Axioms*, 11(10), 555. <https://doi.org/10.3390/axioms11100555>
- Wang, S., Batool, A., Sun, X., & Pan, X. (2024). Non-intrusive reduced-order model for time-dependent stochastic partial differential equations utilizing dynamic mode decomposition and polynomial chaos expansion. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(7). <https://doi.org/10.1063/5.0200406>
- Yuhanna, H., Efendi, & Narwen. (2019). Solusi persamaan diferensial linier koefisien konstan dengan metode pembagi beda. *Matematika UNAND*, 4(4), 1–9. <https://doi.org/10.25077/jmu.4.4.1-9.2015>
- Zill, D. G. (2018). *A first course in differential equations with modeling applications* (11th ed.). Cengage Learning.
- Dinda Renata Cecilia, Fuja Nauli Pasaribu, Rafika Sari Prayetno, Rio Anggara Panjaitan, & Sintia Agustina Siregar. (2025). Implementasi Persamaan Diferensial Model Logistik untuk Prediksi Pertumbuhan Tingkat Pernikahan Sumatera Utara. *Algoritma : Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, Kebumihan Dan Angkasa*, 3(1), 210–221. <https://doi.org/10.62383/algoritma.v3i1.387>
- Laelasari Laelasari. (2025). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Pada Materi Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) Di SMA PGRI 4 Jakarta . *Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumihan Dan Angkasa*, 3(1), 16–25. <https://doi.org/10.62383/bilangan.v3i1.377>
- Neneng Hadawang, Nursina Sya'bania, & Kartini Rahman Nisa. (2025). Pengembangan E-Modul Berbasis Discovery Learning Berbantuan Canva pada Materi Reaksi Reduksi

dan Oksidasi . *Algoritma : Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, Kebumian Dan Angkasa*, 3(1), 222–234. <https://doi.org/10.62383/algoritma.v3i1.386>

Tsuwaibatul Aslamiah Lubis. (2025). Penerapan Metode Numerik dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial. *Pentagon : Jurnal Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 3(1), 131–137. <https://doi.org/10.62383/pentagon.v3i1.421>

Laelasari Laelasari. (2025). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Pada Materi Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) Di SMA PGRI 4 Jakarta . *Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumian Dan Angkasa*, 3(1), 16–25. <https://doi.org/10.62383/bilangan.v3i1.377>

Tsuwaibatul Aslamiah Lubis. (2025). Penerapan Metode Numerik dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial. *Pentagon : Jurnal Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 3(1), 131–137. <https://doi.org/10.62383/pentagon.v3i1.421>

Febya Br Nasution, Dian Cintya Hasmi Br Pohan, Rico Pradana Dita, & Rizq Alwi Marpaung. (2025). Penerapan Metode Adams Bashforth Moulton melalui Persamaan Logistik dalam Memprediksi Jumlah Penduduk di Kota Medan. *Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumian Dan Angkasa*, 3(1), 79–91. <https://doi.org/10.62383/bilangan.v3i1.390>

Rahma Aulia, Sabrina Nasution, Rina Filia Sari, & Muliawaty, M. (2025). Implementasi Program Linear pada Efisiensi Penugasan Jam Kerja Divisi Pengadaan PT. Pelindo Multi Terminal Dengan Metode Hungarian. *Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumian Dan Angkasa*, 3(4), 28–38. <https://doi.org/10.62383/bilangan.v3i4.749>