



Bilangan Kromatik Lokasi Graf kubik $C_{n,2n,2n,n}$ untuk $n = 3$

Salde Ofera

Universitas Darul Ma'arif Indramayu, Jawa Barat, Indonesia.

*Penulis Korespondensi: saldeofera1809@gmail.com

Abstract. Let $G=(V(G),E(G))$ be a connected graph and c be a coloring of the graph G . Let $\Pi=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$, where S_i is the class of colors in G which is colored i with $1\leq i\leq k$. The representation of v with respect to Π is called a color code, denoted $c_\Pi(v)$ is a k -element ordered pair, that is, $c_\Pi(v)=(d(v,S_1),d(v,S_2),\dots,d(v,S_k))$, where $d(v,S_i)=\min\{d(v,x)|x\in S_i\}$ for $1\leq i\leq k$. If each vertex in G has a different color code then c is called a location coloring. The minimum number of colors used in the location coloring of a graph G is called the Location chromatic number with $\chi^L(G)$. This study will discuss the determination of the Location chromatic number of the cubic graph $C_{n,2n,2n,n}$ for $n=3$.

Keywords: Color Code; Cubic Graph $C_{n,2n,2n,n}$; Graph Theory; Location Chromatic Number; Location Coloring.

Abstrak. Misalkan $G=(V(G),E(G))$ adalah suatu graf terhubung dan c adalah suatu graf terhubung dan c adalah suatu pewarnaan dari graf G . Misalkan $\Pi=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$, dimana S_i adalah kelas warna di G yang mana berwarna i dengan $1\leq i\leq k$. Representasi v terhadap Π disebut kode warna, dinotasikan $c_\Pi(v)$ merupakan pasangan terurut dengan k -unsur yaitu, $c_\Pi(v)=(d(v,S_1),d(v,S_2),\dots,d(v,S_k))$, dengan $d(v,S_i)=\min\{d(v,x)|x\in S_i\}$ untuk $1\leq i\leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda maka c disebut pewarnaan lokasi. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi pada graf G disebut bilangan kromatik Lokasi dengan $\chi^L(G)$. Pada penelitian ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik Lokasi graf kubik $C_{n,2n,2n,n}$ untuk $n=3$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi; Graf Kubik $C_{n,2n,2n,n}$; Kode Warna; Pewarnaan Lokasi; Teori Graf.

1. LATAR BELAKANG

Graf merupakan representasi dari suatu permasalahan dengan menggunakan objek-objek berupa titik, dimana setiap lingkaran tersebut dapat terhubung satu sama lain dengan menggunakan sekumpulan titik. Beberapa contoh pengaplikasian teori graf yang umum ditemui pada kehidupan sehari-hari terdapat pada penyusunan struktur organisasi, pengambilan mata kuliah yang divisualisasikan berbentuk bagan alir, maps, rangkaian jaringan listrik dan masih banyak lagi. Graf merupakan pasangan terurut himpunan (V,E) yang dinotasikan dengan $G=(V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul (Bondy & Murty, 2008).

Salah satu kajian yang terdapat dalam teori graf adalah mengenai bilangan kromatik lokasi. Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Erwin, Henning, Slater, dan Zhang pada tahun 2002 sebagai pengembangan dari konsep pewarnaan graf dan dimensi partisi suatu graf (Chartrand et al., 2002). Konsep dimensi partisi sendiri telah diperkenalkan sebelumnya oleh Chartrand, Salehi, dan Zhang pada tahun 1998 (Chartrand et al., 1998). Pewarnaan titik pada

graf merupakan pemberian warna pada setiap titik graf dengan ketentuan bahwa setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda (Bondy & Murty, 2008). Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi pada graf GGG disebut bilangan kromatik lokasi dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Chartrand et al., 2002). Dalam kajiannya, Chartrand dkk. berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi untuk beberapa kelas graf, di antaranya graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ (Chartrand et al., 2002; Yero & Rodríguez-Velázquez, 2013).

$\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf lingkaran diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil atau $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Selain itu, Chartrand dkk juga menunjukkan bahwa graf multipartit lengkap adalah satu-satunya graf orde n yang mempunyai bilangan kromatik Lokasi n , untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya, Sugesti dkk. pada tahun 2019. Membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_{2n}, C_n$ untuk $n = 3$. Untuk mendapatkan hasil yang baru, akan ditentukan bilangan kromatik Lokasi dari graf kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n untuk $n = 3$.

2. KAJIAN TEORITIS

Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $V(G), E(G)$ dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik (*vertexset*) tak kosong dari G dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ menyatakan himpunan sisi (*edgeset*) dari G . Kardinalitas himpunan titik di $V(G)$ disebut orde dari graf G dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan kardinalitas dari himpunan sisi $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Misalkan titik v_i dan titik adalah ujung-ujung v_j adalah ujung-ujung dari sisi e , maka v_i dan v_j dikatakan terkait (*incident*) dengan sisi e . Titik v_i dan v_j dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat sisi yang mengaitkan dua titik tersebut. Derajat (*degree*) dari titik v adalah banyak sisi yang terkait dengan titik v , dinotasikan dengan $\deg(v)$.

Jalan (*walk*) dari suatu graf G adalah suatu barisan hingga yang tak kosong di mana setiap sukunya adalah titik dan sisi berurutan secara bergantian, dinotasikan dengan $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ dengan v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik ujung dari sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Lintasan adalah jalan yang melewati semua titik dan sisi yang berbeda. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang terdapat di dalam lintasan. Jarak antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari u dan v , dinotasikan dengan $d(u, v)$.

Titik dominan adalah titik yang memiliki jarak nol terhadap dirinya sendiri dan jarak satu terhadap setiap titik lainnya di dalam graf, sehingga titik tersebut bertetangga langsung dengan seluruh titik lain dalam graf (Chartrand & Zhang, 2012). Suatu graf GGG dikatakan sebagai graf terhubung (*connected graph*) apabila terdapat lintasan yang menghubungkan setiap pasangan titik di dalam graf GGG (Bondy & Murty, 2008). Konsep keterhubungan graf ini merupakan salah satu sifat dasar dalam teori graf yang sangat penting dalam menganalisis struktur dan karakteristik suatu graf (West, 2001).

3. METODE PENELITIAN

Bilangan Kromatik Lokasi

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) = c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G . Misalkan C_i adalah himpunan titik yang diberi warna i , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_{\Pi}(v)$ dari v adalah k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika $d(v, C_i) = 1$ untuk $v \notin C_i$ dan 0 untuk yang lainnya. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk 2022. telah memberikan teorema dasar bilangan kromatik lokasi su atu graf. Teorema tersebut dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga v .

Teorema 2.2.1 Chartrand, G., Erwin 2002. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf ter hubung G . Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ maka $c(v) \neq c(u)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian se hingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna S_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal S_i dari Π . Akibatnya $c(u) = c(v)$ karna jarak titik u dan titik v ke semua titik di G

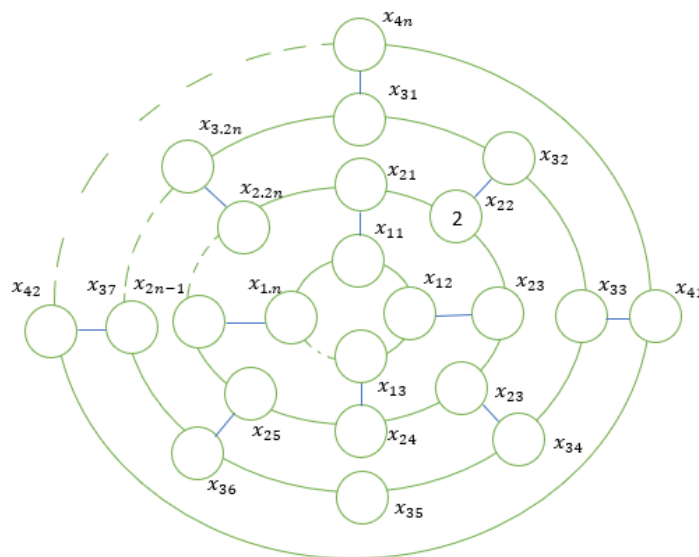
selain ke titik u dan titik v sama, sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c(u) \neq c(v)$ dengan u dan v suatu pewarnaan yang berbeda.

Akibat 3.1.1. [Chartrand, G., Erwin 2002] Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k titik daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k titik daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G . Berdasarkan Teorema 2.3.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap $x_i, i = 1, 2, \dots, k$. Oleh karena v bertetangga dengan semua x_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i . Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$.

3.2 Graf Kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n

Diberikan graf lingkaran dengan n titik yang ditulis sebagai C_n , dengan $n \geq 3$. Kemudian dibentuk graf kubik yang terdiri dari lima buah graf lingkaran yaitu C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n dengan $n \geq 3$. Berikut Gambar 2 adalah graf kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n dengan $n \geq 3$.



Gambar 1. Graf kubik $C_{n,2n,2n,n}, n \geq 3$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan Kromatik Lokasi Graf Kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n untuk $n = 3$.

Pada bab ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n untuk $n = 3$.

Teorema 4.1.1. Misalkan terdapat graf C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n adalah graf kubik, maka bilangan kromatik lokasi $\chi(C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n) = 5$ untuk $n = 3$.

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan titik di C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n untuk $n = 3$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah suatu partisi titik-titik pada graf C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n dengan S_i menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq k$. Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi graf kubik C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n . Dalam menentukan bilangan kromatik lokasi, terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi. Pertama, setiap titik yang bertetangga tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama. Selanjutnya, kode warna setiap titik di C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n terhadap haruslah berbeda. Pandang beberapa kasus berikut. Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa $\chi(C_n, C_{2n}, C_{2n}, C_n) = 5$ untuk $n = 3$. Pertama akan ditunjukkan $\chi(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 5$. Perhatikan bahwa pada graf kubik C_3, C_6, C_6, C_3 terdapat dua C_3 yaitu C_3^1 dan C_3^5 , dan dua C_6 yaitu C_6^2 dan C_6^3 , dapat dilihat pada Gambar 3.0.1. Oleh karena setiap titik pada C_3, C_6, C_6, C_3 berderajat 3, maka akan terdapat 2 titik dominan dengan warna yang sama sehingga kode warnanya akan sama, maka tidak cukup dengan 3 warna agar setiap titik di C_3, C_6, C_6, C_3 memiliki kode warna yang berbeda maka haruslah $\chi_L(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 4$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa untuk sebarang pewarnaan dengan 4 warna akan terdapat 2 titik dengan kode warna yang sama pada C_3, C_6, C_6, C_3 . Prinsip sangkar burung menyatakan bahwa jika n burung terbang menuju m sangkar dan n lebih besar dari m , maka paling sedikit ada satu sangkar yang memuat dua atau lebih burung.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan titik pertama diwarnai dengan warna 1 dan titik-titik yang bertetangga dengan titik pertama diwarnai dengan warna 2, 3, 4, dan 5. Selanjutnya, titik kedua yang diwarnai dengan warna 2 adalah titik selain titik pertama dan bertetangga dengan titik pertama, serta bertetangga dengan titik-titik yang berwarna 1, 3, 4, dan 5. Titik ketiga adalah titik selain titik-titik yang telah diberi warna sebelumnya dan diwarnai dengan warna 3, sedangkan titik-titik yang bertetangga dengannya diwarnai dengan warna 1 dan 2. Selanjutnya, titik keempat diwarnai dengan warna 4 dan titik-titik yang bertetangga dengannya diwarnai dengan warna 1, 2, dan 5, sementara titik lainnya diwarnai dengan kombinasi sebarang dari empat warna. Dalam kondisi ini, akan terdapat titik-titik yang memiliki kombinasi warna jarak yang sama, sehingga kode warna titik-titik tersebut identik. Hal ini bertentangan dengan definisi pewarnaan lokasi yang mengharuskan setiap titik memiliki kode warna yang unik. Oleh karena itu, untuk graf siklus dengan konfigurasi tersebut, diperlukan sedikitnya lima warna agar pewarnaan lokasi dapat terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\chi_l(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 5$ (Chartrand et al., 2003; Chartrand et al., 2002; Bondy & Murty, 2008; Asmiati et al., 2018; Baskoro & Darmaji, 2013).

Perhatikan Gambar 3.1, jika diberi pewaranaan dengan 4 warna untuk C_3, C_6, C_6, C_3 , maka akan terdapat kode warna yang sama adalah di beberapa titik. Karena terdapat kode warnanya sama maka haruslah $\chi(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 5$. Dengan alasan yang sama juga bisa untuk membuktikan $\chi(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 5$ untuk $n = 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\chi(C_3, C_6, C_6, C_3) \leq 5$. Misalkan konstruksi pewarnaan titik terhadap graf kubik C_3, C_6, C_6, C_3 didefinisikan dengan $c: V(C_3, C_6, C_6, C_3) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sedemikian sehingga :

- $c(x_{11}) = c(x_{23}) = c(x_{25}) = c(x_{32}) = c(x_{34}) = c(x_{36}) = c(x_{41}) = 1$
- $c(x_{12}) = c(x_{22}) = c(x_{24}) = c(x_{26}) = c(x_{33}) = c(x_{35}) = 2$
- $c(x_{13}) = 3$
- $c(x_{21}) = c(x_{31}) = c(x_{42}) = 4$
- $c(x_{43}) = 5$

Berdasarkan konstruksi tersebut diperoleh kelas warna sebagai berikut :

$$S_1 = \{x_{11}, x_{23}, x_{25}, x_{32}, x_{34}, x_{36}, x_{41}\}$$

$$S_2 = \{x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{26}, x_{33}, x_{35}\}$$

$$S_3 = \{x_{13}\}$$

$$S_4 = \{x_{21}, x_{31}, x_{42}\}$$

$$S_5 = \{x_{43}\}$$

Dari definisi pewarnaan titik di atas terlihat bahwa setiap titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda. Kode warna pada setiap titik di $C_{3,6,6,3}$ terhadap Π sebagai berikut :

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(x_{11}) &= (d(x_{11}, S_1), d(x_{11}, S_2), d(x_{11}, S_3), d(x_{11}, S_4), d(x_{11}, S_5)) \\ &= (0, 1, 1, 1, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(x_{23}) &= (d(x_{23}, S_1), d(x_{23}, S_2), d(x_{23}, S_3), d(x_{23}, S_4), d(x_{23}, S_5)) \\ &= (0, 1, 2, 2, 4) \end{aligned}$$

$$c_{\Pi}(x_{25}) = (0, 1, 1, 2, 4), c_{\Pi}(x_{36}) = (0, 1, 3, 1, 2)$$

$$c_{\Pi}(x_{32}) = (0, 1, 4, 1, 3), c_{\Pi}(x_{34}) = (0, 1, 3, 2, 2)$$

$$c_{\Pi}(x_{41}) = (0, 3, 5, 1, 1)$$

$$c_{\Pi}(x_{12}) = (1, 0, 1, 2, 5), c_{\Pi}(x_{22}) = (1, 0, 3, 1, 4)$$

$$c_{\Pi}(x_{24}) = (1, 0, 2, 3, 3), c_{\Pi}(x_{26}) = (1, 0, 2, 1, 3)$$

$$c_{\Pi}(x_{33}) = (1, 0, 4, 1, 2), c_{\Pi}(x_{35}) = (1, 0, 4, 2, 1)$$

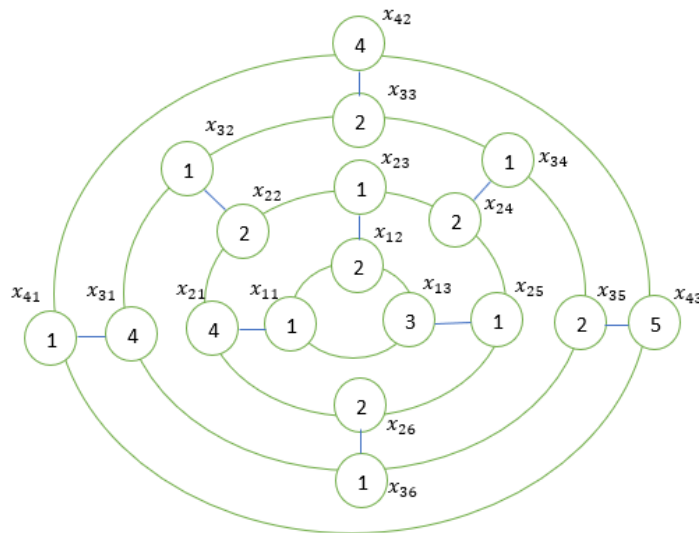
$$c_{\Pi}(x_{13}) = (1,1,0,2,5)$$

$$c_{\Pi}(x_{21}) = (1,1,2,0,4), c_{\Pi}(x_{31}) = (1,2,4,0,2)$$

$$c_{\Pi}(x_{42}) = (1,1,5,0,1)$$

$$c_{\Pi}(x_{43}) = (1,1,5,1,0)$$

Oleh karena setiap titik pada $C_{3,6,6,3}$ memiliki kode warna yang berbeda maka c merupakan pewarnaan lokasi pada $C_{3,6,6,3}$, sehingga diperoleh $\chi L(C_3, C_6, C_6, C_3) \leq 5$. Dari pembuktian $\chi(C_3, C_6, C_6, C_3) \leq 5$ dan $\chi L(C_3, C_6, C_6, C_3) \geq 5$ dapat disimpulkan bahwa $\chi L(C_3, C_6, C_6, C_3) = 5$.



Gambar 2. Graf kubik $C_{n,2n,2n,n}$, $n \geq 3$

5. KESIMPULAN

Bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_{n,2n,2n,n}$ adalah minimum banyaknya warna yang digunakan dalam pada pewarnaan lokasi dari graf $C_{n,2n,2n,n}$. Graf $C_{n,2n,2n,n}$ adalah graf yang dibentuk dari 5 lingkaran yaitu $C_n^1, C_{2n}^2, C_{2n}^3, C_n^4$ dengan $n = 3$ kemudian dibentuk menjadi graf kubik sedemikian sehingga semua titik pada graf $C_{n,2n,2n,n}$ berderajat 3. Pada tugas akhir ini diperoleh bilangan bilangan kromatik lokasi pada graf $C_{n,2n,2n,n}$ adalah 5 untuk $n = 3$.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati, Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Simanjuntak, R. (2018). The locating-chromatic number of certain graphs. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 50(3), 257–268. <https://doi.org/10.5614/j.math.fund.sci.2018.50.3.5>
- Baskoro, E. T., & Darmaji. (2013). On the locating-chromatic number of graphs. *Procedia Computer Science*, 74, 57–60. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.133>

- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2018). *Graph theory with applications*. Springer.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A first course in graph theory*. Dover Publications.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The locating-chromatic number of a graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, 36, 89–101.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2003). Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrete Mathematics*, 269(1–3), 65–79. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00829-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00829-4)
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2003). Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrete Mathematics*, 269(1–3), 65–79. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00705-5](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00705-5)
- Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (1998). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, 55(1–2), 45–54. <https://doi.org/10.1007/s000100050029>
- Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, 59(1), 45–54. <https://doi.org/10.1007/PL00000127>
- Chartrand, G., Zhang, P., Salehi, E., & Alikhani, S. (2002). The locating-chromatic number of a graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, 36, 89–101.
- Sugesti, S., dkk. (2019). *Bilangan kromatik lokasi graf kubik $C_n, C_{2n}C_n, C_{2n}C_n, C_{2n}$ untuk $n = 3$* (Skripsi sarjana tidak dipublikasikan). Universitas Andalas, Indonesia.
- West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Yero, I. G., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2013). A survey on the locating-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics Letters*, 1, 1–8.