

Himpunan Kritis pada Graf Bintang

Dian Mestika Sari

Universitas Negeri Medan

Korespondensi penulis: dianmestika26@email.com

Mulyono Mulyono

Universitas Negeri Medan

Abstract. Labeling is a one-to-one mapping that maps each element of a graph to Positive numbers called labels. One of its kind is edge-magic total labeling. Under special conditions, the results set of labeled graphs whose subsets are labeled and positioned, which builds the same graph as the labeling, is called the critical set. To obtain the critical set of a graph we must know the type of graph. In this study is a star graph. This study aims to determine the critical set in star graphs. The star graph used is the K1.5 star graph using center points 1, $n + 1$ and $2n + 1$. The research results show that by labeling the total magic side of the K1.5 star graph with center point $\lambda(c) = 1$, the magic number $k=14$ is obtained. The possible critical set of K1.5 graphs is 120. In the K1.5 Star Graph with center point $\lambda(c) = n + 1$, the magic number $k=18$ is obtained. The possible critical set of K1.5 graphs is 120. In the K1.5 Star Graph with center point $\lambda(c) = 2n + 1$, the magic number $k=22$ is obtained. The possible critical set of K1.5 graphs is 120.

Keywords: Edge-Magic Total Labeling, Critical Set, Star Graph.

Abstrak. Pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan setiap elemen dari graf ke bilangan positif yang dinamakan dengan label. Salah jenisnya yaitu pelabelan total sisi-ajaib. Dalam kondisi khusus himpunan hasil dari pelabelan graf yang subhimpunan label dan posisinya, yang membangun graf yang sama dengan pelabelannya tersebut secara tunggal disebut dengan himpunan kritis. Untuk memperoleh himpunan kritis dari suatu graf kita harus mengetahui jenis graf tersebut. Pada penelitian ini adalah graf bintang. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan himpunan kritis pada graf bintang. graf bintang yang digunakan adalah graf bintang K1,5 dengan menggunakan titik pusat 1, $n + 1$ dan $2n + 1$. Hasil penelitian menunjukkan pada pelabelan total sisi ajaib Graf Bintang K1,5 dengan titik pusat $\lambda(c) = 1$ diperoleh bilangan ajaib $k=14$. Himpunan kritis graf K1,5 yang memungkinkan sebanyak 120. Pada Graf Bintang K1,5 dengan titik pusat $\lambda(c) = n + 1$ diperoleh bilangan ajaib $k=18$. Himpunan kritis graf K1,5 yang memungkinkan sebanyak 120. Pada Graf Bintang K1,5 dengan titik pusat $\lambda(c) = 2n + 1$ diperoleh bilangan ajaib $k=22$. Himpunan kritis graf K1,5 yang memungkinkan sebanyak 120.

Kata kunci: Pelabelan Total Sisi-Ajaib, Himpunan Kritis, Graf Bintang.

LATAR BELAKANG

Dari sudut pandang matematika, teori graf awalnya hanya dimanfaatkan sebagai solusi untuk memecahkan permasalahan teka-teki, jadi pada saat itu teori graf tidak "sangat" penting pada awalnya, tetapi akhirnya berkembang sangat cepat dalam beberapa dekade terakhir (Daniel dan Taneo 2019). Graf ialah bentuk dari salah satu pemodelan matematika yang proses pembentukannya sulit dan sangat kompleks, namun demikian teori graf menawarkan solusi yang dapat diterapkan dengan sangat baik untuk dalam mengatasi masalah tertentu. Banyak permasalahan yang dapat dijumpai didalam kehidupan sehari-hari yang dapat diaplikasikan dengan menggunakan graf, seperti puzzle games, transportation problem, operation research dan lain sebagainya (Mutianingsih 2016). Graf digunakan untuk untuk merepresentasikan

objek-objek diskrit dan hubungannya antara objek-objek tersebut (Daniel dan Taneo 2019). Representasi visual pada graf ialah merepresentasikan objek sebagai simpul, atau yang disebut juga dengan titik, sedangkan representasi hubungan antar objek-objeknya direpresentasikan dengan edge, sisi atau garis. Nilai dari titik (simpul) dan garis merupakan bilangan asli. Untuk menentukan nilai dari titik (simpul) dan garis digunakan pelabelan.

Pada pelabelan graf hasil yang diperoleh berupa nilai simpul dan sisi. Nilai simpul dan sisi tersebut berupa suatu himpunan yang memetakan sisi terhadap simpul. Dalam kondisi khusus himpunan hasil dari pelabelan graf yang subhimpunan label dan posisinya, yang membentuk graf yang persis (sama) dengan hasil pelabelan grafnya dan hasil pelabelannya hanya dapat membentuk satu graf disebut dengan himpunan kritis.

(Hardi dkk. 2019) menyatakan bahwa permasalahan penentuan himpunan kritis dari sebuah pelabelan graf ialah permasalahan yang cukup rumit dan kompleks karena dalam menentukan subhimpunannya kemungkinan yang diperoleh dari subhimpunan label yang harus di periksa pada graf tersebut jumlahnya sangat banyak, dan juga setelah itu tiap-tiap subset (sub himpunan) tersebut dicari subhimpunan label yang memenuhi syarat dapat menciptakan pelabelan graf secara unik (tunggal).

Dalam menentukan himpunan kritis setiap graf mempunyai aturan yang berbeda-beda. Maka, untuk menentukan himpunan kritis dari suatu graf kita harus mengetahui jenis graf tersebut. Graf yang digunakan dalam pengaplikasian konsep himpunan kritis pada penelitian ini adalah graf bintang.

KAJIAN TEORITIS

Pelabelan pada simpul dan pelabelan sisi dari sebuah graf dapat dilakukan menggunakan berbagai cara. Salah satu metode yang dapat diterapkan ialah dengan cara melakukan pelabelan dengan menggunakan bilangan. Beberapa jenis dari pelabelan graf yang sudah dilakukan pengembangan ialah pelabelan harmoni, pelabelan total tidak teratur, pelabelan graceful, pelabelan anti ajaib dan pelabelan ajaib. Dalam prosesnya pelabelan ajaib dikembangkan menjadi beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan total super simpul ajaib, pelabelan total super sisi ajaib, pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total simpul ajaib.

Pada graf G suatu pelabelan total sisi ajaib ialah merupakan pemetaan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ yang dimana nilai p ialah jumlah dari banyaknya simpul sedangkan q ialah jumlah dari banyaknya sisi, dengan demikian pada tiap sisi $uv \in E(G)$, pada tiap bobot sisi $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) = k$, dengan k merupakan konstanta dengan

nilai bilangan bulat positif. Pada pelabelan total sisi ajaib super ini nilai k deiberi nama dengan konstanta ajaib. Pelabelan total sisi ajaib f dinyatakan merupakan pelabelan total sisi ajaib super dari suatu graf G jika memenuhi sifat $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ dan sifat $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ (Hardi dkk. 2019).

Masalah penentuan himpunan kritis pada pelabelan suatu graf ialah permasalahan yang rumit dan cukup sulit. Hal tersebut disebabkan banyaknya kemungkinan sub himpunan dari suatu graf seiring dengan bertambahnya jumlah simpul dan sisinya sehingga perlu dilakukan pengujian setiap subset untuk mengetahui subset mana yang dapat membentuk satu-satun ya pelabelan dari graf tersebut (Baskoro 2007).

Konsep himpunan kritis pertama kali diaplikasikan terhadap persegi latin. Dengan demikian prinsip himpunan kritis yang digunakan ialah prinsip himpunan kritis pada persegi laten. Berikut ini ialah salah satu bentuk contoh himpunan kritis dari sebuah persegi latin L yang memiliki ukuran 3×3 :

1	2	3
2	3	1
3	1	2

(a)

1	2	
2		

(b)

Gambar 1: (a) Persegi Laten L (b) Himpunan Kritis

Dari Gambar diatas dapat dilihat bahwa gambar 1b merupakan himpunan kritis dari persegi laten. Hal tersebut karena gambar 1b jika diteruskan hanya dapat membentuk satu persegi laten pada gambar 1a. Pada gambar 1b hanya dapat menghasilkan satu persegi laten dan masing-masing sub himpunan dari gambar 1b dapat membentuk lebih dari satu persegi laten. Sifat inilah yang diterapkan pada graf yang akan ditentukan himpunan kritisnya.

Misalkan terdapat graf G yang diberikan pelabelan λ . Dimisalkan pelabelan $Q_\lambda = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_c\}$, $|Q_\lambda| = c$, pada pelabelan λ dari sebuah graph G , ialah set (himpunan) $Q_i = (j, u_j)$ yang dimana j ialah posisi label dari sebuah simpul atau sebuah sisi dengan label ajaibnya yaitu x_j . $Q_\lambda(G)$ merupakan sebuah himpunan kritis dari pelabelan λ pada sebuah graph G apabila himpunan tersebut memenuhi syarat berikut (Adithia 2000) :

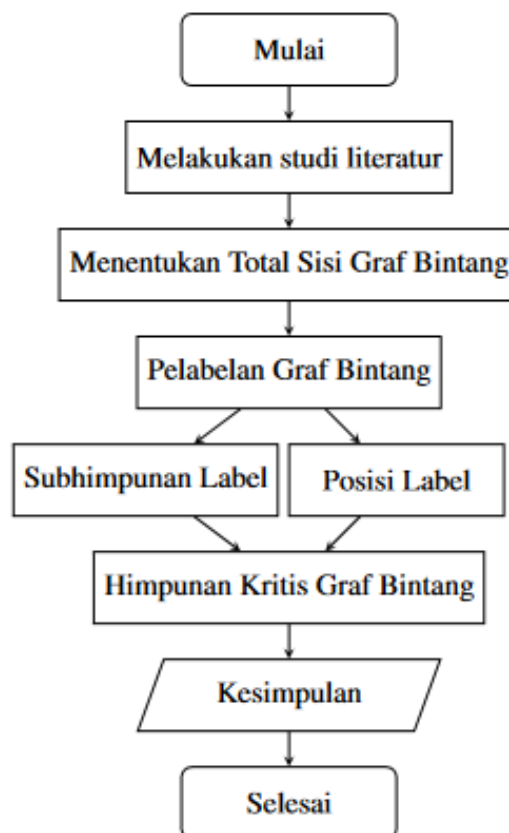
1. Himpunan kritis $Q_\lambda(G)$ hanya dapat membentuk λ pada sebuah graph G . Artinya Himpunan kritis $Q_\lambda(G)$ hanya dapat membentuk satu pelabelan.

2. Setiap sub himpunan dari himpunan kritis $Q_\lambda(G)$ tidak mempunyai sifat (1). Artinya setiap sub himpunan dari himpunan kritis $Q_\lambda(G)$ harus dapat membentuk lebih dari satu pelabelan

Apabila sebuah himpunan kritis $Q_\lambda(G)$ mempunyai sebanyak c anggota maka dengan demikian himpunan kritisnya harus berukuran c . Sebuah Himpunan kritis Q_λ dinyatakan minimal apabila ukuran pada tiap himpunan kritis lainnya lebih besar ataupun sama dengan Q_λ .

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini dilaksanakan di Perpustakaan Universitas Negeri Medan dan waktu yang dibutuhkan dalam menyelesaikan penelitiann yaitu satu tahun. Jenis penelitian yaitu riset kepustakaan atau studi literatur. Penelitian dilakukan dengan pengumpulan literatur-literatur yang relevan dengan pembahasan penelitian seperti buku-buku, jurnal-jurnal, penelitian terdahulu maupun dokumen-dokumen referernsi lainnya dan kemudian dilakukan penelaahan terhadap literatur yang sudah diperoleh. Adapun skema prosedur penelitian yang akan dilakukan:



Gambar 2: Skema Prosedur Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

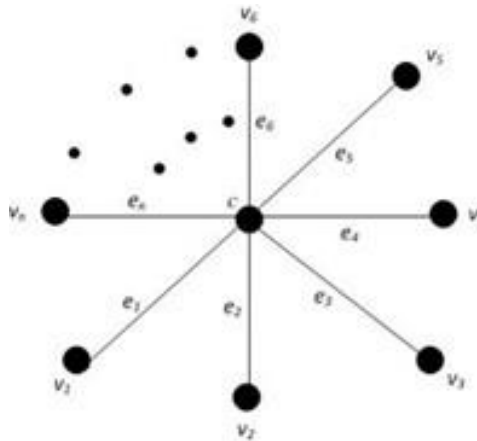
Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Bintang

Graf bintang $K_{1,n}$ merupakan sebuah graf dengan jumlah simpulnya yakni $n + 1$ simpul, yang dimana salah satu simpul yang memiliki derajat n , yang diberi nama simpul pusat, dan untuk n simpul lainnya yang memiliki derajat satu, yang diberi nama simpul daun. Pada Lemma 4.1 berikut ini akan dijelaskan hal tersebut.

1. Lemma 4.1.

Label simpul pusat untuk pelabelan total sisi ajaib graf bintang ialah simpul pusat 1, simpul pusat $n + 1$, dan simpul pusat $2n + 1$.

Bukti. Berikut ialah gambar graf bintang $K_{1,n}$.



Gambar 3: Graf Bintang $K_{1,n}$

Akan diperlihatkan bukti untuk suatu pelabelan ajaib pada sebuah graf bintang $K_{1,n}$ label yang mungkin untuk simpul pusat yakni simpul pusat 1, simpul pusat $n + 1$, dan simpul pusat $2n + 1$. Andaikan untuk simpul pusatnya dilabeli menggunakan x , yakni $\lambda(c) = x$. Simpul daunnya diberi pelabelan 1, 2, 3, ..., n . Pada bagian sisi lainnya diberi label $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$, ..., $(2n + 1)$. Dengan demikian maka

$$\begin{aligned} kn &= (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + n) + (n + 1) \\ &\quad + (n + 2) + (n + 3) + \dots + (2n + 1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dikarenakan label simpul pusat x termasuk di antara label simpul 1, 2, 3, ..., n , sehingga persamaannya menjadi

$$\begin{aligned} kn &= (n - 1)x + 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 3) + \dots + (2n + 1) \\ &= x + \frac{1}{2}(2n + 1)(n - 1)(2n + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)x + (n+1) + (2n1) \\
&= (nx - x) + (n+1)(2n+1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Lemma (4.1) direduksi dengan menggunakan modulo n , maka dihasilkan:

$$x \equiv (n+1)(2n+1) \equiv 1 \tag{4.3}$$

Sehingga didapat setiap label simpul pusat yaitu simpul pusat 1, simpul pusat $(n+1)$, dan simpul pusat $(2n+1)$

2. Teorema 4.1

Terdapat sebanyak $3 \cdot 2^n$ jumlah pelabelan ajaib yang ada pada graf $K_{1,n}$ yang sama

Bukti.

Misalkan terdapat sebuah graf bintang $K_{1,n}$ dimana

$$V(K_{1,n}) = \{\{c\} \cup \{v_i\} | 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(K_{1,n}) = \{cv_i | 1 \leq i \leq n\}$$

Kasus yang memungkinkan untuk pelabelan ajaib menurut Lemma 4.1 ialah $\lambda(c) = 1$, yang dimana bilangan ajaibnya yakni $k = 2n + 4$, atau $\lambda(c) = n + 1$, yang dimana bilangan ajaibnya $k = 3n + 3$, atau $\lambda(c) = 2n + 1$, yang dimana bilangan ajaibnya yakni $k = 4n + 2$.

Berikutnya akan dilakukan peninjauan terhadap tiap kasus diatas.

a) Untuk $\lambda(c) = 1$,

Dikarenakan pada graf $K_{1,n}$ pelabelannya ialah pelabelan ajaib, dengan demikian maka jumlah dari $\lambda(v_i) + \lambda(e_i)$ nilainya harus sama dengan M , dimana $M = k - \lambda(c)$. Sehingga diperoleh:

$$M \equiv 2n + 4 - 1 \equiv 2n + 3 \tag{4.4}$$

Akibatnya hanya ada satu cara untuk mempartisi $2n + 1$ kedalam bilangan bulat, yakni $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$ kedalam $n + 1$ himpunan

$$\{\lambda(c), \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_m, a_m\}\}$$

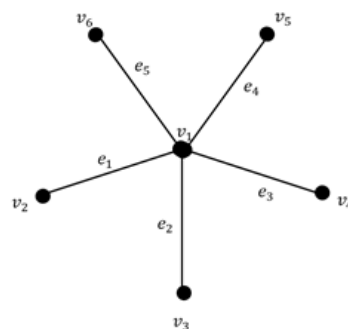
dimana setiap $a_i + b_i = M$ dan $a_i \lambda(v_i), b_i = \lambda(e_i)$. Agar lebih mudah, pilihlah label sedemikian sehingga $a_i < b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Selanjutnya diasumsikan bahwa $\{\lambda(v_i), \lambda(e_i)\} = \{a_i, b_i\}$. Untuk masing-masing n himpunan mempunyai dua pilihan, yang memiliki kesesuaian dengan $\lambda(v_i) = a_i$ atau $\lambda(v_i) = b_i$, sehingga didapat $2n$ pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$ untuk $\lambda(c) = 1$.

Dengan menggunakan cara yang sama untuk $\lambda(c) = n + 1$ dan $\lambda(c) = 2n + 1$, juga didapat $2n$ pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$. Sehingga masing-masing tiga nilai dari $\lambda(c)$ memberikan $2n$ pelabelan ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$. Jadi, diperoleh $3 \cdot 2^n$ pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$ yang sama.

Pada pelabelan sisi ajaib terhadap graf bintang $K_{1,n}$. Dengan demikian didapat $3 \cdot 2^n$ pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$ terdapat tiga kemungkinan label untuk simpul pusat, yakni $1, n + 1$, atau $2n + 1$. Pada masing-masing kasus tersebut diperoleh bilangan ajaib sebagai berikut, $\lambda(c) = 1$, dengan bilangan ajaib $k = 2n + 4$, $\lambda(c) = n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 3n + 3$, dan $\lambda(c) = 2n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 4n + 2$. Kemudian, telah ditunjukkan kembali bahwa untuk setiap kemungkinan label untuk titik pusat tersebut, terdapat $2n$ kemungkinan pelabelan ajaib pada $K_{1,n}$. Sehingga diperoleh $3 \cdot 2^n$ kemungkinan bentuk bentuk pelabelan sisi ajaib pada graf bintang $K_{1,n}$.

Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Bintang $K_{1,5}$

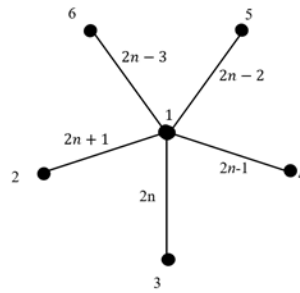
Pada proses pelabelan total sisi ajaib terhadap graf bintang $K_{1,n}$ sesuai dengan Lemma 4.1 didapat sebanyak tiga kemungkinan label untuk simpul pusatnya. Simpul-simpul pusatnya yaitu $1, n+1$, atau $2n+1$. Pada setiap simpul pusat yang memungkinkan diperoleh cara menentukan hasil bilangan ajaib yaitu, $\lambda(c) = 1$, dengan bilangan ajaib $k = 2n + 4$, $\lambda(c) = n + 1$, dengan bilangan ajaib $k = 3n + 3$, dan $\lambda(c) = 2n + 1$, bilangan ajaib diperoleh dengan persamaan $k = 4n + 2$. Penggambaran graf bintang $K_{1,5}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 4: Graf Bintang $K_{1,5}$

Berdasarkan gambar diatas dapat dilihat bahwa pada graf bintang $K_{1,5}$ terdapat 6 edge dan 5 vertex.

1. Simpul pusat $\lambda(c) = 1$



Gambar 5: Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = 1$

Berdasarkan gambar diatas dilakukan pelabelan pada setiap sisi dan simpul. Hasil yang diperoleh dengan simpul pusat $\lambda(c) = 1$ adalah sebagai berikut:

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 2$$

$$v_3 = 3$$

$$v_4 = 4$$

$$v_5 = 5$$

$$v_6 = 6$$

$$e_1 = 2n + 1$$

$$= 2(5) + 1$$

$$= 11$$

$$e_2 = 2n$$

$$= 2(5)$$

$$= 10$$

$$e_3 = 2n - 1$$

$$= 2(5) - 1$$

$$= 9$$

$$e_4 = 2n - 2$$

$$= 2(5) - 2$$

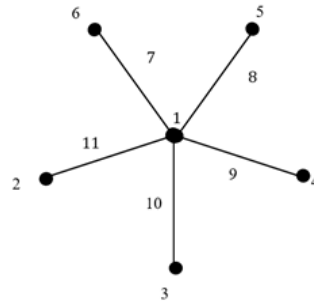
$$= 8$$

$$e_5 = 2n - 3$$

$$= 2(5) - 3$$

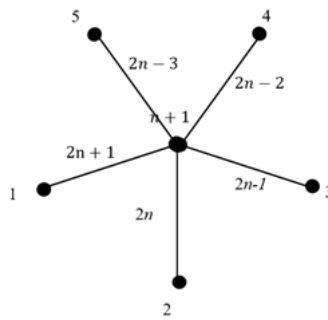
$$= 7$$

Setelah dilakukan pelabelan pada setiap sisi diperoleh bilangan ajaib $k = 2n + 4 = 2(5) + 4 = 14$. Dengan demikian maka dihasilkan pelabelan dengan simpul pusat $\lambda(c) = 1$ adalah sebagai berikut:



Gambar 6: Hasil Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = 1$

2. Simpul pusat $\lambda(c) = n + 1$



Gambar 7: Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = n + 1$

Berdasarkan gambar diatas dilakukan pelabelan pada setiap sisi dan simpul. Hasil yang diperoleh dengan simpul pusat $\lambda(c) = n + 1$ adalah sebagai berikut:

$$v_1 = n + 1$$

$$= 5 + 1$$

$$= 6$$

$$v_2 = 1$$

$$v_3 = 2$$

$$v_4 = 3$$

$$v_5 = 4$$

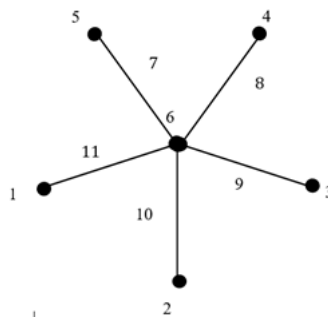
$$v_6 = 5$$

$$e_1 = 2n + 1$$

$$= 2(5) + 1$$

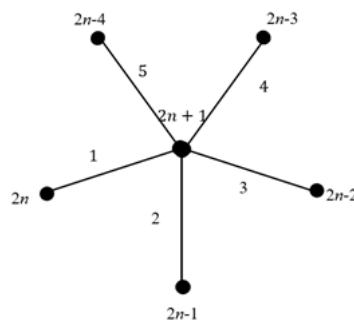
$$\begin{aligned}
 &= 11 \\
 e_2 &= 2n \\
 &= 2(5) \\
 &= 10 \\
 e_3 &= 2n - 1 \\
 &= 2(5) - 1 \\
 &= 9 \\
 e_4 &= 2n - 2 \\
 &= 2(5) - 2 \\
 &= 8 \\
 e_5 &= 2n - 3 \\
 &= 2(5) - 3 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

Setelah dilakukan pelabelan pada setiap sisi diperoleh bilangan ajaib $k = 3n + 3 = 3(5) + 3 = 18$. Dengan demikian maka dihasilkan pelabelan dengan simpul pusat $\lambda(c) = n + 1$ adalah sebagai berikut:



Gambar 8: Hasil Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = n + 1$

3. Simpul pusat $\lambda(c) = 2n + 1$



Gambar 9: Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = 2n + 1$

Berdasarkan gambar diatas dilakukan pelabelan pada setiap sisi dan simpul. Hasil yang diperoleh dengan simpul pusat $\lambda(c) = 2n + 1$ adalah sebagai berikut:

$$v_1 = 2n + 1$$

$$= 2(5) + 1$$

$$= 11$$

$$v_2 = 2n$$

$$= 2(5)$$

$$= 10$$

$$v_3 = 2n - 1$$

$$= 2(5) - 1$$

$$= 9$$

$$v_4 = 2n - 2$$

$$= 2(5) - 2$$

$$= 8$$

$$v_5 = 2n - 3$$

$$= 2(5) - 3$$

$$= 7$$

$$v_6 = 2n - 4$$

$$= 2(5) - 4$$

$$= 6$$

$$e_1 = 1$$

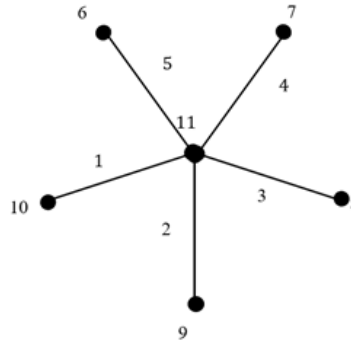
$$e_2 = 2$$

$$e_3 = 3$$

$$e_4 = 4$$

$$e_5 = 5$$

Setelah dilakukan pelabelan pada setiap sisi diperoleh bilangan ajaib $k = 4n + 2 = 4(5) + 2 = 22$. Dengan demikian maka dihasilkan pelabelan dengan simpul pusat $\lambda(c) = 2n + 1$ adalah sebagai berikut:



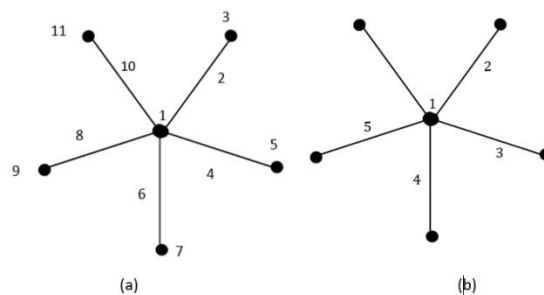
Gambar 10: Hasil Pelabelan Graf Bintang $K_{1,5}$ dengan $\lambda(c) = 2n + 1$

Himpunan Kritis Pada Graf Bintang $K_{1,5}$

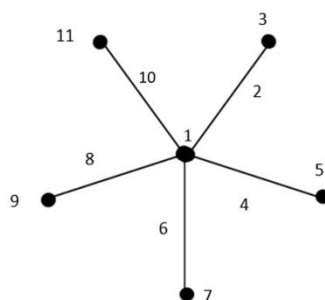
Himpunan kritis pada graf $K_{1,5}$ dilakukan dengan mengaplikasikan sifat-sifat himpunan kritis yang diperoleh pada persegi latin. Himpunan Kritis graf bintang pada setiap simpul pusat adalah sebagai berikut:

1. Simpul pusat $\lambda(c) = 1$

Hasil himpunan kritis dan pelabelan dari salah satu himpunan kritis dengan Himpunan Kritis $Q_\lambda = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 11: Posisi dan Salah Satu Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 1)$



Gambar 12: Hasil Pelabelan Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 1)$

Gambar 12 adalah hasil pelabelan dari Gambar 11(b). Himpunan kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 1)$ pada gambar 11(b) menghasilkan sebuah pelabelan ajaib. Setiap Q_λ hanya dapat membangun λ (satu pelabelan ajaib), pada $K_{1,5}$. Setiap subset dari Q_λ dapat membangun lebih dari satu λ . Dengan demikian maka kelima himpunan tersebut merupakan himpunan kritis. Apabila label sisi daun yang pada (2,3,4,5,6) label dilakukan penukaran posisi ataupun penukaran nilai label maka himpunan akan tetap menghasilkan himpunan kritis. Dari kejadian diatas dapat menyimpulkan kondisi permutasi. Dimana Kelima label yang ada dapat menempati 4 posisi label dengan syarat satu label hanya dapat diletakkan di satu Posisi. Dengan demikian untuk menentukan jumlah himpunan kritis dapat digunakan rumus permutasi sebagai berikut:

$$\text{Jumlah himpunan kritis} = P(n, r)$$

Keterangan:

n = Jumlah label atau sisi daun dari graf bintang $K_{1,n}$

r = Jumlah posisi label yang akan ditempati oleh label

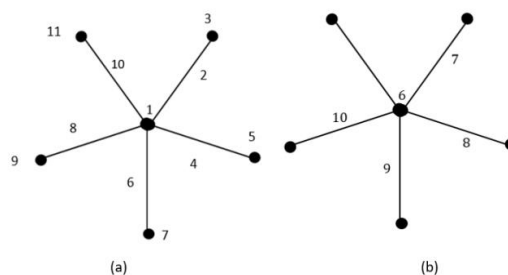
Berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh jumlah himpunan kritis dari graf bintang $K_{1,5}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah himpunan kritis} &= P(n, r) \\ &= P(5, 4) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{5!}{(5-4)!} \\ &= 120 \end{aligned}$$

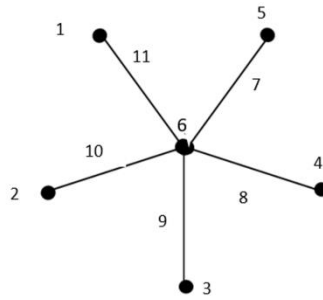
Maka diperoleh untuk jumlah himpunan kritis yang memungkinkan dari graf bintang $K_{1,5}$ adalah sebanyak 120 himpunan kritis.

2. Simpul pusat $\lambda(c) = n + 1$

Hasil himpunan kritis dan pelabelan dari salah satu himpunan kritis dengan Himpunan Kritis $Q_\lambda = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 13: Posisi dan Salah Satu Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = n + 1)$



Gambar 14: Hasil Pelabelan Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = n + 1)$

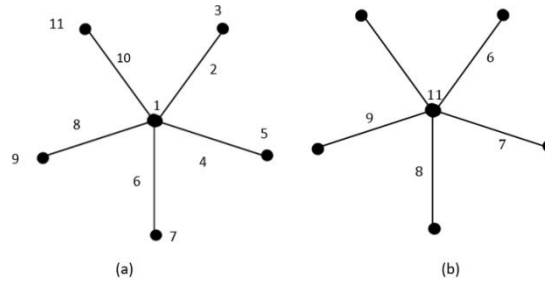
Gambar 14 adalah hasil pelabelan dari Gambar 13(b). Himpunan kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = n + 1)$ pada gambar 13(b) menghasilkan sebuah pelabelan ajaib. Setiap Q_λ hanya dapat membangun λ (satu pelabelan ajaib), pada $K_{1,5}$. Setiap subset dari Q_λ dapat membangun lebih dari satu λ . Dengan demikian maka kelima himpunan tersebut merupakan himpunan kritis. Apabila label sisi daun yang pada (7,8,9,10,11) label dilakukan penukaran posisi ataupun penukaran nilai label maka himpunan akan tetap menghasilkan himpunan kritis. Dari kejadian diatas dapat menyimpulkan kondisi permutasi. Dimana Kelima label yang ada dapat menempati 4 posisi label dengan syarat satu label hanya dapat diletakkan di satu Posisi. Dengan demikian untuk menentukan jumlah himpunan kritis dapat digunakan rumus permutasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{Jumlah himpunan kritis} &= P(n, r) \\
 &= P(5, 4) \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} \\
 &= \frac{5!}{(5-4)!} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

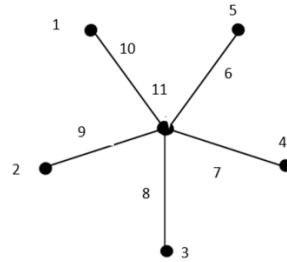
Maka diperoleh untuk jumlah himpunan kritis yang memungkinkan dari graf bintang $K_{1,5}$ adalah sebanyak 120 himpunan kritis.

3. Simpul pusat $\lambda(c) = 2n + 1$

Hasil himpunan kritis dan pelabelan dari salah satu himpunan kritis dengan Himpunan Kritis $Q_\lambda = \{(1, 11), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)\}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 15: Posisi dan Salah Satu Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 2n + 1)$



Gambar 16: Hasil Pelabelan Himpunan Kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 2n + 1)$

Gambar 16 adalah hasil pelabelan dari Gambar 15(b). Himpunan kritis Graf Bintang $K_{1,5}(\lambda(c) = 2n + 1)$ pada gambar 15(b) menghasilkan sebuah pelabelan ajaib. Setiap $Q\lambda$ hanya dapat membangun λ (satu pelabelan ajaib), pada $K_{1,5}$. Setiap subset dari $Q\lambda$ dapat membangun lebih dari satu λ . Dengan demikian maka kelima himpunan tersebut merupakan himpunan kritis. Apabila label sisi daun yang pada (6,7,8,9,10) label dilakukan penukaran posisi ataupun penukaran nilai label maka himpunan akan tetap menghasilkan himpunan kritis. Dari kejadian diatas dapat menyimpulkan kondisi permutasi. Dimana Kelima label yang ada dapat menempati 4 posisi label dengan syarat satu label hanya dapat diletakkan di satu Posisi. Dengan demikian untuk menentukan jumlah himpunan kritis dapat digunakan rumus permutasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{Jumlah himpunan kritis} &= P(n, r) \\
 &= P(5, 4) \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} \\
 &= \frac{5!}{(5-4)!} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh untuk jumlah himpunan kritis yang memungkinkan dari graf bintang $K_{1,5}$ adalah sebanyak 120 himpunan kritis.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan pemaparan diatas, diperoleh beberapa kesimpulan yaitu Label simpul pusat untuk pelabelan total sisi ajaib graf bintang ialah simpul pusat 1, simpul pusat $n + 1$, dan simpul pusat $2n + 1$. Pada simpul pusat 1 bilangan ajaibnya yakni $k = 2n + 4$. Pada simpul pusat $n + 1$ bilangan ajaibnya yakni $k = 3n + 3$. Pada simpul pusat $2n + 1$, bilangan ajaibnya yakni $k = 4n + 2$. Setelah dilakukan Penentuan Himpunan kritis pada graf $K_{1,5}$ dengan masing- masing simpul pusat 1, simpul pusat $n + 1$, dan simpul pusat $2n + 1$ diperoleh sebanyak 120 himpunan kritis. Pada simpul pusat 1 diperoleh bilangan ajaib $k = 14$. Pada simpul pusat $n + 1$ diperoleh bilangan ajaib $k = 18$. Pada simpul pusat $2n + 1$ diperoleh bilangan ajaib $k = 22$.

Saran

Berkaitan dengan pemaparan hasil yang diperoleh sehingga perlu dilaksanakannya penelitian yang lebih lanjut berkaitan himpunan kritis pada jenis graf lainnya ataupun dengan graf bintang yang lebih besar.

DAFTAR REFERENSI

- Adithia, M., (2000), Himpunan kritis suatu pelabelan graph, PhD thesis, Tesis.
- Daniel, F., dan Taneo, P. N., (2019): Teori Graf, Deepublish.
- Hardi, M. F., Yulianti, L., dan Zulakmal, Z., (2019). PELABELAN TOTAL SISI AJAIB SUPER PADA GRAF PRISMA BEREKOR, Jurnal Matematika:UNAND, 8(1), 189-194
- Mutianingsih, N., (2016): DIMENSI METRIK PADA GRAF TURAN, Wahana: Tridarma Perguruan Tinggi, 67(2), 47–50
- Triyani, S. R. N., Wardayani, A., dan Taufiq, I., (2016): Karakteristik Himpunan Kritis dalam Pelabelan TSA pada Graf Pohon, Jurnal Matematika Integratif ISSN, 1412, 6184.